

# 基于特征值加权的稳健水声阵列信号 DOA 估计\*

李维强, 邢传玺, 谈光枝, 黄廷龙

云南民族大学电气信息工程学院 / 云南省无人自主系统重点实验室, 云南 昆明 650504

**摘要:**提出了一种融合 Toeplitz 重构与特征值加权降噪的嵌套阵列离格稀疏贝叶斯水声信号方位估计方法。算法通过虚拟域映射与重构获得满秩协方差矩阵,并对信号子空间特征值加权以抑制噪声并保留有效信息;进而构建离格稀疏表示模型,利用贝叶斯学习实现最大后验估计。仿真与海试验证表明,该方法仅需 6 个物理阵元即可估计 11 个信源,在低快拍和近距离多目标场景下仍保持高分辨率与稳定性;当信噪比为 -15 dB 时,所提算法的 RMSE 较同阵列下的 MUSIC 与 ESPRIT 算法分别提升了 53.11% 和 60.04%。所提算法能有效利用虚拟阵列自由度、抑制噪声干扰,实现低信噪比、小快拍数下更精确的 DOA 估计,鲁棒性更优。

**关键词:**嵌套阵列; DOA 估计; Toeplitz 重构; 特征值加权降噪; 离格稀疏贝叶斯

**中图分类号:** TN911.7 **文献标志码:** A **文章编号:** 2097-0137(XXXX)XX-0001-09

## DOA estimation for underwater acoustic array signals based on eigenvalue weighting

LI Weiqiang, XING Chuanxi, TAN Guangzhi, HUANG Tinglong

College of Electrical and Informaion Technology, Yunnan Minzu University / Yunnan Key Laboratory of Unmanned Autonomous System, Kunming 650504, China

**Abstract:** An off-grid sparse Bayesian method for underwater acoustic signals using nested arrays is proposed. The method integrates Toeplitz reconstruction and eigenvalue-weighted denoising. It constructs a full-rank covariance matrix through virtual array mapping and reconstruction, then applies eigenvalue weighting to the signal subspace to suppress noise while preserving essential information. And off-grid sparse representation model is solved by Bayesian learning for maximum a posteriori estimation. Simulation and sea trial results demonstrate that the method can estimate up to 11 sources using only 6 physical sensor elements. It maintains high resolution and stability even in scenarios with a low number of snapshots and multiple closely spaced targets. Furthermore, at a signal-to-noise ratio (SNR) of -15 dB, the estimation performance of the algorithm shows an improvement of 53.11% and 60.04%, compared to MUSIC and ESPRIT algorithms under the same array configuration. By effectively leveraging the degrees of freedom offered by the virtual array and suppressing noise interference, the proposed algorithm achieves more accurate direction of arrival (DOA) estimation under conditions of low SNR and a small number of snapshots, demonstrating superior robustness.

**Key words:** nested array; DOA estimation; Toeplitz reconstruction; eigenvalue-weighted noise reduction; off-grid sparse Bayesian

\* 收稿日期: 2025-11-06

录用日期: 2025-12-08

网络首发日期: XXXX-XX-XX

基金项目: 国家自然科学基金(61761048); 云南省基础研究专项(20210AT070132)

作者简介: 李维强(1999年生),男;研究方向:水声阵列信号处理;Email: liweiqiang2023@163.com

通信作者: 邢传玺(1982年生),男;研究方向:水下信息感知与处理;Email: xingchuanxi@ymu.edu.cn

全文阅读



ZR20250236

波达方向(DOA)估计是水声阵列信号处理的关键问题之一(李荣禄等, 2024; Molaei et al., 2024)。传统子空间类算法(杨德森等, 2014; 徐付佳等, 2025)及其改进算法(卢俊等, 2021; Merkofer et al., 2023)在计算复杂度、信号模型假设和环境适应性方面存在局限。基于压缩感知的稀疏重构算法(Malioutov et al., 2005; Lu et al., 2023; Pote et al., 2023),特别是稀疏贝叶斯学习(SBL),在低信噪比下实现了超分辨率估计(Fu et al., 2023; 高卫港等, 2023; Wang et al., 2023),但在恶劣海洋环境中性能仍会下降(Zhang et al., 2024)。

现有DOA估计多基于均匀线阵,自由度受阵元数限制。嵌套阵列(NA)(Pal et al., 2010)通过差分共阵构建虚拟阵元,可在不增加物理阵元的前提下提升自由度与分辨力(刘振等, 2023)。但现有虚拟阵列扩展与协方差矩阵常存在秩亏问题,影响估计精度(苏龙等, 2022; Sharma et al., 2022)。

针对秩亏问题,本文引入Toeplitz构造满秩协方差矩阵,有效扩展自由度。在此基础上,提出了一种基于类维纳滤波思想的特征值加权降噪策略。通过对协方差矩阵的特征值分量进行选择加权,强化信号特征并抑制噪声。并通过将该策略嵌入离格稀疏贝叶斯框架,构建高精度、高鲁棒性的参数估计体系,实现了在低信噪比、弱信号等恶劣条件下的稳定DOA估计。

## 1 阵列建模与孔径扩展

### 1.1 嵌套阵列信号模型

典型的二阶嵌套阵列由内层密集子阵( $N_1$ 个阵元,间距 $d = \lambda/2$ )和外层稀疏子阵( $N_2$ 个阵元,间距 $d_2 = (N_1 + 1)d$ )组成,整体阵元位置为

$$\begin{aligned} N &= M_1 \cup M_2, \\ M_1 &= \{xd, x = 1, 2, \dots, N_1\}, \\ M_2 &= \{xd(N_1 + 1), x = 1, 2, \dots, N_2\}. \end{aligned}$$

二阶嵌套阵列最佳配置如表1所示。

假设 $K$ 个独立的远场窄带信号 $s_i(t)$ 以入射角

表1 二阶嵌套阵列最大自由度分配

Table 1 Maximum freedom degree allocation for second-order nested array

阵元数( $N$ )	阵元分布	自由度(DOF)
$N$ 为偶数	$N_1 = N_2 = \frac{N}{2}$	$\frac{N^2 - 2}{2} + N$
$N$ 为奇数	$N_1 = \frac{N - 1}{2}, N_2 = \frac{N + 1}{2}$	$\frac{N^2 - 1}{2} + N$

$\theta_i (i = 1, 2, \dots, K)$ 入射至嵌套阵列,快拍数为 $T$ ,接收信号模型为

$$\mathbf{X}(t) = \mathbf{A}\mathbf{S}(t) + \mathbf{N}(t),$$

其中 $\mathbf{X}(t) = [x_1(t), x_2(t), \dots, x_N(t)]^T$ 为输出矩阵, $\mathbf{S}(t) = [s_1(t), s_2(t), \dots, s_K(t)]^T \in \mathbb{C}^{K \times 1}$ 为信源矩阵, $\mathbf{N}(t) = [n_1(t), n_2(t), \dots, n_N(t)]^T \in \mathbb{C}^{N \times 1}$ 为噪声矩阵。 $\mathbf{A}$ 为阵列流型矩阵,有

$$\mathbf{A} = [\boldsymbol{\alpha}(\theta_1), \boldsymbol{\alpha}(\theta_2), \dots, \boldsymbol{\alpha}(\theta_K)],$$

式中 $\boldsymbol{\alpha}(\theta_k) = \left[1, e^{j\frac{2\pi d}{\lambda}\sin\theta_k}, \dots, e^{j\frac{2\pi N_2 d}{\lambda}\sin\theta_k}\right]^T \in \mathbb{C}^{N \times 1}$ 为导向矢量, $(\cdot)^T$ 表示转置。接收信号的协方差矩阵(He et al., 2025)为

$$\mathbf{R}_x = \mathbf{E}[\mathbf{X}(t)\mathbf{X}^H(t)] = \mathbf{A}\mathbf{R}_s\mathbf{A}^H + \mathbf{Q},$$

式中 $\mathbf{E}[\cdot]$ 为期望; $(\cdot)^H$ 为共轭转置; $\mathbf{R}_s = \mathbf{E}[\mathbf{S}(t)\mathbf{S}^H(t)]$ 为信号协方差矩阵; $\mathbf{Q} = \mathbf{E}[\mathbf{N}(t)\mathbf{N}^H(t)]$ 为噪声协方差矩阵。

在实际应用中,观测数据受限于有限快拍数 $T$ ,协方差矩阵通常通过样本协方差估计,具体为

$$\hat{\mathbf{R}}_x = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \mathbf{X}(t)\mathbf{X}^H(t).$$

### 1.2 虚拟阵列孔径扩展

嵌套阵列通过疏密子阵差分共阵构造远超物理阵元的虚拟阵元,其协方差矩阵向量化(丁姗姗等, 2015)为

$$\mathbf{r}_v = \text{vec}(\mathbf{R}_x) = (\mathbf{A}^* \odot \mathbf{A})\mathbf{q} + \sigma_N^2 \mathbf{I}_N,$$

其中 $\text{vec}(\cdot)$ 为向量化操作。 $\mathbf{q} = [\sigma_1^2, \sigma_2^2, \dots, \sigma_N^2]^T$ 为信号功率; $\mathbf{I}_N = [\mathbf{e}_1^T, \mathbf{e}_2^T, \dots, \mathbf{e}_N^T]^T$ ;  $\sigma_N^2$ 为噪声矩阵; $\odot$ 为Khatri-Rao积。 $\mathbf{B} \in \mathbb{C}^{N^2 \times K}$ 为阵列流型矩阵,其差分共阵矩阵定义为

$$\mathbf{B} = \mathbf{A}^* \odot \mathbf{A} = [\boldsymbol{\alpha}^*(\theta_1) \otimes \boldsymbol{\alpha}(\theta_1), \boldsymbol{\alpha}^*(\theta_2) \otimes \boldsymbol{\alpha}(\theta_2), \dots, \boldsymbol{\alpha}^*(\theta_K) \otimes \boldsymbol{\alpha}(\theta_K)],$$

其中

$$\boldsymbol{\alpha}^*(\theta_k) \otimes \boldsymbol{\alpha}(\theta_k) = \left[ e^{j\frac{2\pi(m_1 - m_1)\sin\theta_k}{\lambda}}, e^{j\frac{2\pi(m_2 - m_1)\sin\theta_k}{\lambda}}, \dots, e^{j\frac{2\pi(m_N - m_1)\sin\theta_k}{\lambda}}, \dots, e^{j\frac{2\pi(m_N - m_N)\sin\theta_k}{\lambda}} \right]^T,$$

差分共阵位置集合由物理阵列集合 $U$ 的差分构成:

$$D = \{m_p - m_q \mid m_p, m_q \in U\},$$

$$U = \{0, d, N_1 d, N_1 d + (N_1 + 1)d, \dots, N_1 d + (N_2 - 1)(N_1 + 1)d\}.$$

该结构可构建无孔洞的虚拟均匀线阵,有效提升阵列自由度和孔径。图1展示了6阵元的二阶嵌套阵列扩展后的阵元分布。

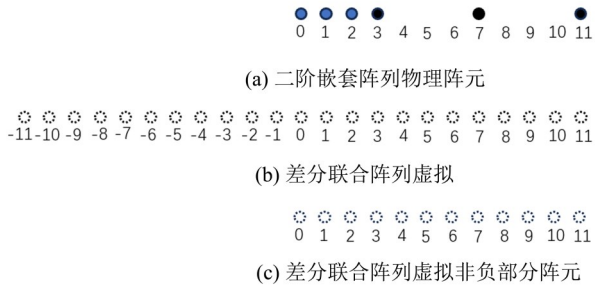


图1 二阶嵌套阵列及其差分联合阵列

Fig. 1 Second-order nested array and its differential joint array

由图1(b)可知,虚拟阵元关于0对称且存在冗余,经去重保留非负部分,得到精简的虚拟阵列接收信号模型:

$$\mathbf{y} = \tilde{\mathbf{A}}\mathbf{q} + \sigma_n^2 \mathbf{I}_{N\tilde{N}},$$

其中  $\mathbf{y} = [y_1, y_2, \dots, y_{N\tilde{N}}] \in \mathbb{C}^{N\tilde{N} \times 1}$ ,  $\tilde{N}$  为去重后虚拟阵元数量,  $\tilde{N} = N_1 N_2 + N_2$ ;  $\tilde{\mathbf{A}}$  为去重后阵列流型矩阵,  $\tilde{\mathbf{A}} = [\tilde{\mathbf{a}}(\theta_1), \tilde{\mathbf{a}}(\theta_2), \dots, \tilde{\mathbf{a}}(\theta_K)] \in \mathbb{C}^{N\tilde{N} \times K}$ ,  $\tilde{\mathbf{a}}(\theta_i) = [e^{j\frac{2\pi \sin \theta_i \tilde{m}_1}{\lambda}}, e^{j\frac{2\pi \sin \theta_i \tilde{m}_2}{\lambda}}, \dots, e^{j\frac{2\pi \sin \theta_i \tilde{m}_N}{\lambda}}]$  为导向矢量;  $\mathbf{I}_{N\tilde{N}} \in \mathbb{C}^{[(N^2-2)/2 + N] \times 1}$  为用于筛选并保留虚拟阵列中位置非负的阵元所对应的观测数据的选择矩阵,其第  $(N^2/4 + N/2)$  行为1,其余元素均为0,即:  $\mathbf{I}_{N\tilde{N}} = \mathbf{e}_j \in \mathbb{R}^\ell$ ,  $\mathbf{e}_j$  是标准基向量。

## 2 Toeplitz 重构及特征值加权降噪

### 2.1 Toeplitz 重构

虚拟均匀线阵接收信号  $\mathbf{y}$  可近似为单快拍数据(毛彦元等, 2025),其存在秩亏问题,为此采用重构技术加以解决。由前述讨论可知,物理阵元数为  $N$  的二阶嵌套阵列,其有效虚拟阵元数为  $(N^2/4 + N/2)$ 。基于此,通过估计虚拟均匀线阵接收信号的有偏样本自协方差序列并构建矩阵,重构1个维度为  $(N^2/4 + N/2) \times (N^2/4 + N/2)$  的满秩协方差矩阵:

$$\mathbf{R}_T = \begin{bmatrix} \partial_0 & \partial_1 & \cdots & \partial_{N^2/4 + N/2 - 2} & \partial_{N^2/4 + N/2 - 1} \\ \partial_{-1} & \partial_0 & \cdots & \cdots & \partial_{N^2/4 + N/2 - 2} \\ \vdots & \partial_{-1} & \cdots & \cdots & \vdots \\ \partial_{-N^2/4 - N/2 + 2} & \vdots & \cdots & \cdots & \partial_1 \\ \partial_{-N^2/4 - N/2 + 1} & \partial_{-N^2/4 - N/2 + 2} & \cdots & \partial_{-1} & \partial_0 \end{bmatrix}.$$

该矩阵满足共轭对称性,任意索引满足  $\partial_i = \partial_{-i}^*$ ,其主对角线的元素为实数,其余元素共轭对称,该结构等同于理想均匀线的协方差矩阵。因此,仅需  $N$  个物理阵元即可实现  $O[(N^2/4 + N/2) \times (N^2/4 + N/2)]$  量级的自由度扩

展,显著提高参数估计性能。

### 2.2 特征值加权降噪

高分辨率谱估计依赖对信号与噪声子空间的准确分离。传统子空间算法通过对协方差矩阵特征值分解将前  $K$  个较大特征值所张成的子空间划分为信号子空间,其余归为噪声子空间。然而,在低信噪比、小快拍数或信号相关的水声环境中,信号与噪声子空间易重叠,导致信号成分丢失,从而降低估计分辨率与算法鲁棒性。

为此,本文提出一种基于类维纳滤波思想的特征值加权降噪策略。维纳滤波的核心是在最小均方误差准则下为含噪观测设计最优线性加权系数,该系数随信道信噪比单调变化。借鉴该思想,本策略将协方差矩阵的每个特征值分量视为一个独立的观测通道,并依据估计的信噪比为各分量分配连续的自适应权重,实现对信号与噪声分量的软判别与分离。该方法摒弃了传统硬性划分子空间的做法,通过构造与噪声方差相关的加权因子,有针对性地抑制信号子空间中的噪声成分。该方法在有效抑制噪声的同时,能最大限度地保留有效信号,尤其在弱信号条件下,显著提升了低信噪比与小快拍数场景下的估计鲁棒性和空间分辨能力。具体实现步骤如下。

首先对协方差矩阵进行特征值分解:

$$\mathbf{R}_{XX} = \mathbf{V}_s \mathbf{\Lambda}_s \mathbf{V}_s^H + \sigma_n^2 \mathbf{V}_n \mathbf{V}_n^H,$$

式中  $\mathbf{\Lambda}_s = \text{diag}(b_1, b_2, \dots, b_D)$ ,  $b_1 \geq b_2 \geq \dots \geq b_{D+1} = b_L^2 = \sigma_n^2$ 。对  $\mathbf{R}_{XX}$  进行特征值分解后,得到  $M$  个特征值。若信号独立,前  $K$  个最大特征值对应的特征向量  $\mathbf{V}_s = [v_1, v_2, \dots, v_K]$  构成信号子空间,其余特征向量  $\mathbf{V}_n = [v_{K+1}, v_{K+2}, \dots, v_{\tilde{N}}]$  归为噪声子空间。噪声子空间的特征值可近似反映噪声功率,为稳健估计噪声方差,取噪声子空间中较大一半特征值的均值作为估计值

$$\hat{\sigma}_n^2 = \frac{1}{L} \sum_{i=1}^L \lambda_i^{\text{noise}}, \quad L = \frac{M-K}{2}.$$

将第  $i$  个特征值视为一个广义观测  $\lambda_i$ ,并代入噪声估计方差  $\hat{\sigma}_n^2$ ,得到适用于特征值分量的加权因子

$$\omega_i = \frac{\lambda_i}{\lambda_i + \hat{\sigma}_n^2}. \quad (1)$$

利用该加权因子对特征值进行修正,得到降噪后的特征值  $\tilde{\lambda}_i = \lambda_i \omega_i$ ,并重构去噪协方差矩阵

$$\mathbf{R}_D = \sum_{i=1}^K \tilde{\lambda}_i \tilde{\mathbf{V}}_i \tilde{\mathbf{V}}_i^H = \sum_{i=1}^K \omega_i \lambda_i \mathbf{V}_i \mathbf{V}_i^H. \quad (2)$$

### 3 稀疏建模及贝叶斯推理

在完成基于特征值加权的协方差矩阵降噪处理后,得到噪声抑制后的虚拟协方差矩阵  $\mathbf{R}_D$ 。从信号处理角度看,  $\mathbf{R}_D$  可视为理想无噪协方差矩阵的渐进无偏估计,保留了完整的方位信息。考虑到稀疏贝叶斯学习对噪声敏感的问题,去噪后的  $\mathbf{R}_D$  可有效提高其适用性。因此,以  $\mathbf{R}_D$  作为稀疏贝叶斯推理的观测输入,构建其与过完备字典间的稀疏表示模型,以通过贝叶斯推理实现目标方位的精确估计。

#### 3.1 离格稀疏建模

将空间角度  $[-\pi/2, \pi/2]$  均匀划分为  $N$  个离散点  $\tilde{\Theta} = \{\tilde{\theta}_1, \tilde{\theta}_2, \dots, \tilde{\theta}_N\}$ , 每个点代表一个可能的入射方向。假设信源数为  $K (K < M \ll N)$ , 相邻网格间隔构成集合  $r = \{\tilde{\theta}_2 - \tilde{\theta}_1, \tilde{\theta}_3 - \tilde{\theta}_2, \dots, \tilde{\theta}_N - \tilde{\theta}_{N-1}\}$ , 在  $N$  个角度点上,目标方位可表示为过完备稀疏模型。然而,实际方向常偏离网格集合  $\tilde{\Theta}$ , 存在离格误差,为减少失配误差,对阵列方向矢量进行一阶泰勒展开线性化近似为

$$\varphi(\theta_k) = \mathbf{a}(\tilde{\theta}_{n_k}) + \mathbf{b}(\tilde{\theta}_{n_k})(\theta_k - \tilde{\theta}_{n_k}),$$

式中  $\tilde{\theta}_{n_k}$  为最接近  $\theta_k$  的网格点;  $\mathbf{b}(\tilde{\theta}_{n_k})$  是  $\mathbf{a}(\tilde{\theta}_{n_k})$  的一阶导数,  $\mathbf{b}(\tilde{\theta}_{n_k}) = \mathbf{a}'(\tilde{\theta}_{n_k})$ 。网格误差向量

$$\boldsymbol{\beta} = [\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_N]^T \in [-r/2, r/2]^N,$$

其中

$$\beta_n = \begin{cases} \theta_k - \tilde{\theta}_{n_k}, & n = n_k, \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

据此构造带偏移补偿稀疏字典:

$$\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{\beta}) = \hat{\mathbf{A}}_{\tilde{\theta}} + \mathbf{B} \text{diag}(\boldsymbol{\beta}),$$

其中

$$\hat{\mathbf{A}}_{\tilde{\theta}} = [\mathbf{a}(\tilde{\theta}_1), \mathbf{a}(\tilde{\theta}_2), \dots, \mathbf{a}(\tilde{\theta}_N)],$$

$$\mathbf{B} = [\mathbf{b}(\tilde{\theta}_1), \mathbf{b}(\tilde{\theta}_2), \dots, \mathbf{b}(\tilde{\theta}_N)].$$

因此,观测数据可以表示为

$$\hat{\mathbf{h}} = \boldsymbol{\Phi} \mathbf{R}_D = \boldsymbol{\Phi} \hat{\mathbf{S}}.$$

#### 3.2 稀疏贝叶斯推理

为估计目标方位,引入稀疏贝叶斯模型。假设噪声与信号均服从复高斯分布,信号先验概率为

$$p(\hat{\mathbf{S}} | \boldsymbol{\gamma}) \sim \prod_{i=1}^T \prod_{t=1}^N \text{CN}(s_i(t) | 0, \gamma_i) = \prod_{t=1}^T \text{CN}(\mathbf{S}(t) | 0, \boldsymbol{\Gamma}), \quad (3)$$

其中  $\boldsymbol{\Gamma} = \text{diag}(\boldsymbol{\gamma})$  为信号协方差,  $\boldsymbol{\gamma} = [\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_N]^T$  是表示稀疏性的超参数集合,  $\text{CN}$  表示复高斯分布。

$\mathbf{X}$  的似然函数为

$$p(\mathbf{X} | \hat{\mathbf{S}}; \alpha_0) = \prod_{t=1}^T \text{CN}(\mathbf{X}(t) | \mathbf{A} \mathbf{S}(t), \alpha_0^{-1} \mathbf{I}_M), \quad (4)$$

式中  $\alpha_0 = 1/\sigma^2$ ,  $\sigma^2$  为噪声方差;  $\mathbf{I}_M$  为单位矩阵;

假设超参数  $\boldsymbol{\gamma}$  服从伽马 (Gamma) 先验分布:

$$p(\boldsymbol{\gamma}) = \prod_{i=1}^N \text{Gamma}(\gamma_i; 1, \rho),$$

式中  $\text{Gamma}(x; u, v) = [\text{Gamma}(u)]^{-1} v^u x^{u-1} \exp(-vx)$ 。

$\text{Gamma}(u) = \int_0^{\infty} t^{u-1} e^{-t} dt$ ;  $\rho$  为选定的极小正数。通常  $\alpha_0$  未知,并假设其服从 Gamma 先验,  $p(\alpha_0) = \text{Gamma}(\alpha_0; c, d)$ 。当  $c, d \rightarrow 0$  即可获得超参数。

综上,联合概率密度函数表示为

$$p(\hat{\mathbf{S}}, \hat{\mathbf{h}}, \alpha_0, \boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\beta}) = p(\hat{\mathbf{h}} | \hat{\mathbf{S}}, \alpha_0, \boldsymbol{\beta}) \cdot p(\hat{\mathbf{S}} | \boldsymbol{\gamma}) \cdot p(\alpha_0) \cdot p(\boldsymbol{\gamma}) \cdot p(\boldsymbol{\beta}).$$

根据贝叶斯推理,结合式(3)~(4)可得  $\hat{\mathbf{S}}$  的后验概率密度为

$$p(\hat{\mathbf{S}} | \hat{\mathbf{h}}, \alpha_0, \boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\beta}) = \frac{p(\hat{\mathbf{h}} | \hat{\mathbf{S}}, \alpha_0, \boldsymbol{\beta}) \cdot p(\hat{\mathbf{S}} | \boldsymbol{\gamma})}{p(\hat{\mathbf{h}} | \alpha_0, \boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\beta})} \\ = \text{CN}(\hat{\mathbf{S}} | \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}),$$

其后验均值和协方差分别为

$$\boldsymbol{\mu}(t) = \alpha_0 \boldsymbol{\Sigma} \boldsymbol{\Phi}^H \hat{\mathbf{h}}(t), \quad t = 1, 2, \dots, T, \quad (5)$$

$$\boldsymbol{\Sigma} = (\alpha_0 \boldsymbol{\Phi}^H \boldsymbol{\Phi} + \boldsymbol{\Gamma}^{-1})^{-1}, \quad (6)$$

$\boldsymbol{\mu}$  和  $\boldsymbol{\Sigma}$  的计算依赖于超参数  $\alpha_0, \boldsymbol{\gamma}$  和  $\boldsymbol{\beta}$ , 采用最大后验概率准则,则  $\alpha_0$  和  $\boldsymbol{\gamma}$  更新公式为

$$\alpha_0^{\text{new}} = \frac{TM + c - 1}{d + \sum_{t=1}^T \|\hat{\mathbf{h}}(t) - \boldsymbol{\Phi} \boldsymbol{\mu}(t)\|_2^2 + T \text{tr}(\boldsymbol{\Phi}^H \boldsymbol{\Sigma} \boldsymbol{\Phi})}, \quad (7)$$

$$\gamma_n^{\text{new}} = \frac{1}{2\rho} \left( -T + \sqrt{T^2 + 4\rho \sum_{t=1}^T [\Xi_t]_{nn}} \right), \quad n = 1, 2, \dots, N, \quad (8)$$

式中  $\Xi_t \triangleq \boldsymbol{\mu}(t) [\boldsymbol{\mu}(t)]^H$ 。网格误差影响方位估计精度,可以采用期望最大化准则来找到网格误差。

最大化  $E \left[ \ln(p(\hat{\mathbf{h}} | \hat{\mathbf{S}}, \alpha_0, \boldsymbol{\beta}) \cdot p(\boldsymbol{\beta})) \right]$ , 相当于

最小化  $E \left\{ \|\hat{\mathbf{h}} - \boldsymbol{\Phi} \hat{\mathbf{S}}\|_2^2 \right\}$ , 即

$$E \left\{ \|\hat{\mathbf{h}} - \boldsymbol{\Phi} \hat{\mathbf{S}}\|_2^2 \right\} = E \left\{ \|\hat{\mathbf{h}} - (\hat{\mathbf{A}}_{\tilde{\theta}} + \mathbf{B} \text{diag}(\boldsymbol{\beta})) \hat{\mathbf{S}}\|_2^2 \right\} \\ = \boldsymbol{\beta}^T \mathbf{P} \boldsymbol{\beta} - 2\mathbf{v}^T \boldsymbol{\beta} + C, \quad (9)$$

其中

$$\mathbf{v} = \mathbb{R} \left\{ \text{diag}(\bar{\boldsymbol{\mu}}) \mathbf{B}^H (\hat{\mathbf{h}} - \hat{\mathbf{A}}_{\tilde{\theta}} \bar{\boldsymbol{\mu}}) - \text{diag}(\mathbf{B}^H \hat{\mathbf{A}}_{\tilde{\theta}} \boldsymbol{\Sigma}) \right\},$$

常数项  $C$  是与  $\boldsymbol{\beta}$  无关的常量。半正定矩阵

$$\mathbf{P} = \mathbb{R} \left\{ \overline{\mathbf{B}^H \mathbf{B}} \odot \boldsymbol{\mu} \boldsymbol{\mu}^H + \boldsymbol{\Sigma} \right\},$$

式中  $\mathbb{R}$  为实数集。据此角度修正向量的更新形式为

$$\boldsymbol{\beta}^{\text{new}} = \arg \min_{\boldsymbol{\beta} \in [-r/2, r/2]^N} \left\{ \boldsymbol{\beta}^T \mathbf{P} \boldsymbol{\beta} - 2\mathbf{v}^T \boldsymbol{\beta} \right\}.$$

通过式(9)对  $\boldsymbol{\beta}$  求偏导数并置 0, 得第  $n$  个分量

的闭式更新公式:

$$\beta_n = \frac{v_n - (\mathbf{P}_n)^T \boldsymbol{\beta}_{-n}}{P_{nn}},$$

其中  $\boldsymbol{\beta}_{-n}$  代表向量  $\boldsymbol{\beta}$  除去第  $n$  个元素。由于  $\beta_n \in [-r/2, r/2]$ , 有

$$\boldsymbol{\beta}_n^{\text{new}} = \begin{cases} \beta_n, & \beta_n \in [-r/2, r/2]; \\ r/2, & \beta_n > r/2; \\ -r/2, & \beta_n < -r/2. \end{cases} \quad (10)$$

综上, 通过最大化后验概率密度, 依次更新超参数  $\alpha_0$  和  $\boldsymbol{\gamma}$ , 并依据最大化准则获取角度修正向量  $\boldsymbol{\beta}$  以及最终的网格误差  $\beta_n$ 。迭代公式(7)、(8)、(10)直至收敛, 得到  $K$  个信源的 DOA 估计值, 即  $\theta_k = \theta_{nk} + \beta_{nk}$ ,  $k = 1, 2, \dots, K$ 。基于上述推导, 本文算法的具体流程如下:

(1) 构建二阶嵌套阵列模型, 计算其协方差矩阵  $\mathbf{R}_x$  并向量化为  $\mathbf{r}_v$ , 对其去冗余得向量  $\mathbf{y}$ 。

(2) 估计自协方差序列, 利用 Toeplitz 重构, 将  $\mathbf{y}$  重构为满秩协方差矩阵  $\mathbf{R}_r$ 。

(3) 特征值分解  $\mathbf{R}_r$ , 通过式(1)设计的加权因子  $\omega_i$  对信号子空间特征值加权, 得到式(2)所示的去噪后的协方差矩阵  $\mathbf{R}_D$ 。

(4) 构造带偏移补偿的稀疏字典  $\Phi(\boldsymbol{\beta})$ , 建立离格稀疏模型  $\hat{\mathbf{h}}$ 。

(5) 初始化超参数  $\alpha_0$  和  $\boldsymbol{\gamma}$ , 并将角度修正向量  $\boldsymbol{\beta}$ 、均值  $\boldsymbol{\mu}$  和方差  $\boldsymbol{\Sigma}$  初始化为 0。

(6) 通过式(5)、(6)求解  $\boldsymbol{\mu}$  和  $\boldsymbol{\Sigma}$ , 并依次迭代式(7)、(8)、(10)得到更新后的  $\alpha_0^{\text{new}}$ ,  $\boldsymbol{\gamma}^{\text{new}}$  和  $\boldsymbol{\beta}^{\text{new}}$ 。

(7) 当  $\frac{\|\boldsymbol{\gamma}^n - \boldsymbol{\gamma}^{n-1}\|_2}{\|\boldsymbol{\gamma}^{n-1}\|_2} \leq \tau$  或达到最大迭代次数,

继续下一步; 否则跳至步骤(6)。

(8) 计算源信号的 DOA 估计值  $\theta_k$ 。

## 4 仿真实验

为验证所提算法性能, 进行多组仿真实验。所有对比算法均基于相同的 6 个物理阵元进行设计, 所提算法、MUSIC-NA、ESPRIT-NA 均采用二阶嵌套阵列。如图 1 所示, 密集子阵和稀疏子阵各 3 阵元, 间距分别为  $0.5\lambda$  和  $2\lambda$ , OGSBI-ULA 采用均匀线阵配置, 阵元间距为  $0.5\lambda$ 。角度划分为  $[-\pi/2, \pi/2]$ , 信噪比  $\text{SNR} = 10\lg(P_s/P_n)$ ,  $P_s, P_n$  分别为信号功率和噪声功率。实验均采用 200 次蒙特卡罗独立重复试验, 以均方根误差 (RMSE) 评估 DOA 估计性能。

$$\text{RMSE} = \sqrt{\frac{1}{GK} \sum_{g=1}^G \sum_{k=1}^K (\hat{\theta}_{k_g} - \theta_k)^2},$$

其中  $G$  为独立实验次数,  $K$  为信源数,  $\hat{\theta}_{k_g}$  为第  $g$  次独立实验中对  $\theta_k$  的估计值。

### 4.1 降噪效果评估

在快拍数为 500、入射角为  $[-11.6^\circ, 11.6^\circ]$  的条件下, 对比算法在使用与不使用降噪策略时的性能。图 2(a) 显示, 当信噪比  $\text{SNR} = -10$  dB 时, 未降噪时主瓣宽、伪峰多, 分辨力弱; 降噪后主瓣更窄, 估计更准确。图 2(b) 为 RMSE 随 SNR 变化曲线。可以发现, 所提算法在低信噪比下优势明显, 高信噪比下与传统方法相当。这说明该降噪策略能有效抑制噪声干扰, 提升估计精度。

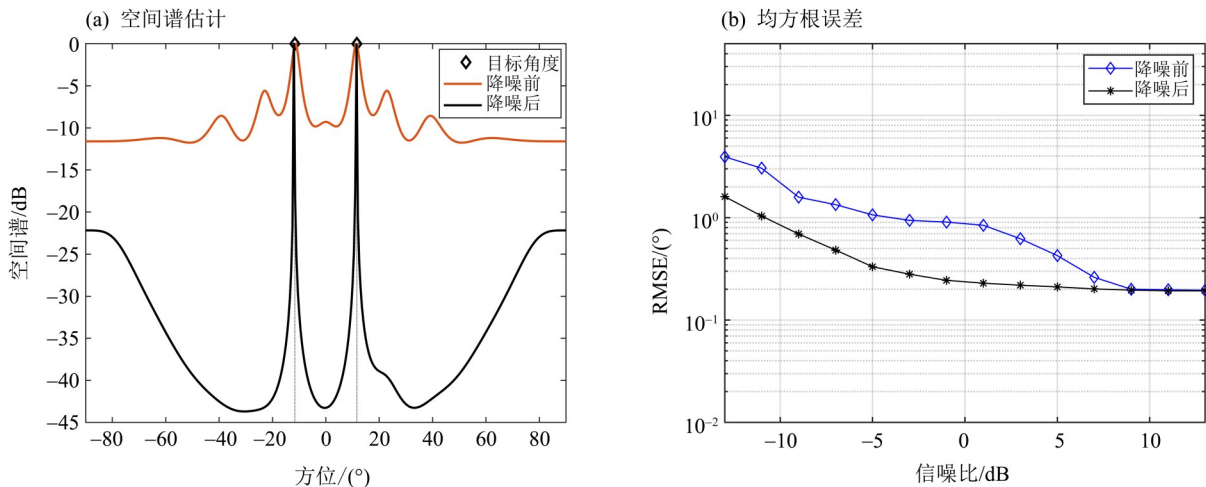


图 2 特征值加权降噪效果

Fig. 2 Weighted noise reduction effects of eigenvalues

## 4.2 空间谱估计

图3(a)为所提算法与MUSIC-NA、ESPRIT-NA、OGSBI-ULA算法在入射角为 $[-11.6^\circ, 11.6^\circ]$ ,  $T = 500$ ,  $\text{SNR} = -10 \text{ dB}$ 下的空间谱估计性能。结果表明,所提算法主瓣更尖锐、分辨能力更强、估计精度更高;OGSBI-ULA主瓣宽、伪峰明显,定位精度受限;ESPRIT-NA伪峰较多,估计性能较差;MUSIC-NA可实现基本的目标检测,但其主瓣相对较宽,分辨率不足。图3(b)为 $\text{SNR} = -20 \text{ dB}$ 的实验结果,可以看出所提算法仍能较为准确地估计信源入射方向。

## 4.3 均方根误差

两组实验均设定2个线性调频信源,入射角为 $[-36.6^\circ, 2.5^\circ]$ 。在信噪比 $\text{SNR} = [-15, 5] \text{ dB}$ ,  $T = 500$ 时分析估计性能与信噪比的关系;在 $T =$

$[100, 1000]$ ,  $\text{SNR} = -10 \text{ dB}$ 时,分析估计性能与快拍数的关系。

图4显示,所提算法较其他算法有着更低的RMSE。 $\text{SNR} = -15 \text{ dB}$ 时,其估计性能较MUSIC-NA、ESPRIT-NA、OGSBI-ULA算法分别提高了53.11%、60.04%和67.23%,展现出良好的抗噪性和鲁棒性;当快拍数变化时,各算法的RMSE均随 $T$ 的增加而下降,所提算法在小快拍数下仍能保持较高精度,性能优于对比算法,稳定性更强。

图5为不同网格间距下所提算法的RMSE随SNR的变化曲线。仿真设定 $\text{SNR} = [-4, 20] \text{ dB}$ ,其余参数同上。结果表明,RMSE随SNR的增大而下降,在高SNR时趋于稳定;网格越精细,RMSE越低,估计精度越高。

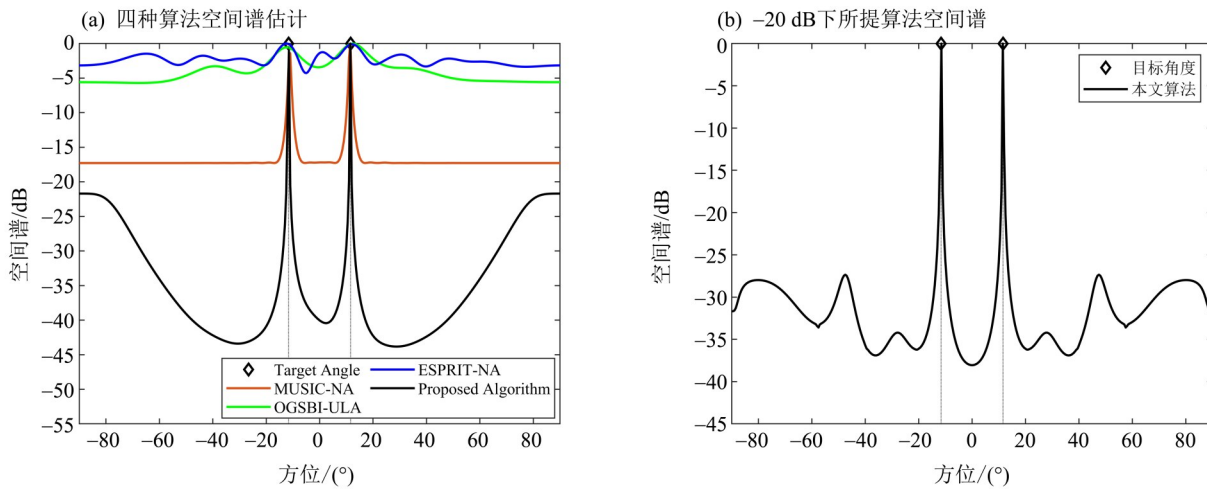


图3 DOA估计的空间谱分析

Fig. 3 Spatial spectrum analysis of DOA estimation

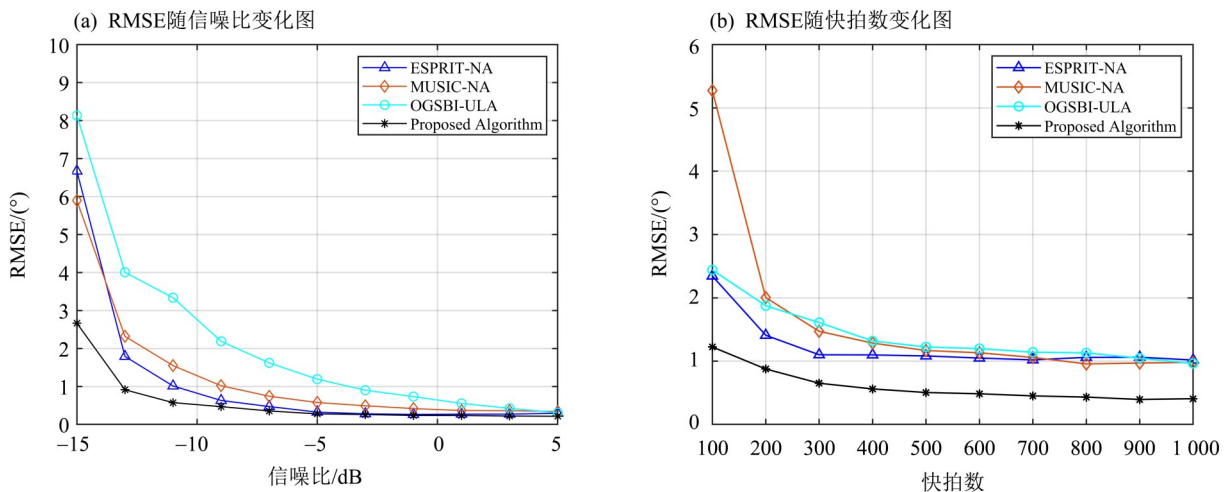


图4 不同算法的RMSE

Fig. 4 RMSE of different algorithms

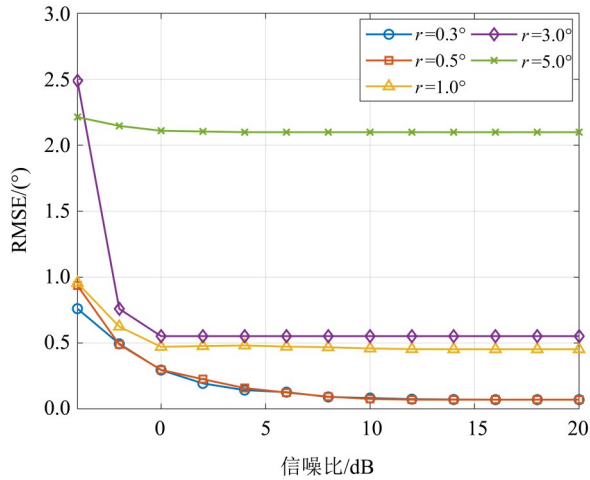


图 5 不同网格间距下 RMSE 随 SNR 的变化

Fig. 5 RMSE varies with SNR under different grid spacings

#### 4.4 最大可分辨信源数

根据 Wang et al. (2017), 均匀阵列最多可分辨  $N - 1$  个信源。嵌套阵列扩展后最大可分辨数为  $\tilde{N} - 1$ ,  $\tilde{N} - 1 = (N_1 N_2 + N_2) - 1$ , 其中  $N_1 \leq N_2$ , 仿真采用  $N_1 = N_2 = 3$  子阵配置, 扩展后的等效均匀阵列阵元数为 12, 则最大可分辨数为 11。设定 11 个信源均匀分布在  $[-60^\circ, 60^\circ]$ , SNR = 5 dB, 网格间隔  $r = 0.5^\circ$ ,  $T = 500$ 。图 6 表明, 所提方法仅用 6 个阵元即可准确估计全部 11 个信源方向, 验证了虚拟阵列扩展自由度的有效性。

#### 4.5 紧密声源分辨能力

仿真设定两个邻近信源  $[-2.3^\circ, 6.6^\circ]$ , SNR = -10 dB,  $T = 500$ , 图 7(a) 展示了 4 类算法的空间功率谱。结果显示, 所提算法主瓣最窄、峰值最尖锐

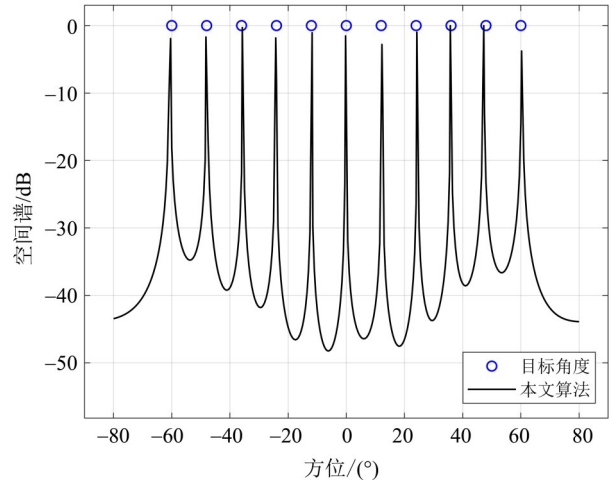


图 6 11 个入射信源角度估计

Fig. 6 Estimation of 11 incident source angles

清晰, 具有最优的紧密信源分辨性能。为进一步评估所提算法在处理紧邻信号 DOA 估计中的分辨能力, 分析了不同 DOA 间隔下的分辨概率。实验中, SNR 和  $T$  与前述保持一致, 设定 2 个目标 DOA 为  $\theta_1 = \varepsilon$  和  $\theta_2 = (\varepsilon + \Delta\theta)$ , 对应谱值为  $\varphi_1$  和  $\varphi_2$ 。DOA 间隔为  $[2^\circ, 26^\circ]$ 。引入判定准则: 假设 DOA 中间值  $\theta_s = (\theta_1 + \theta_2)/2$ , 当  $\theta_s$  对应的谱值  $\varphi_s \leq (\varphi_1 + \varphi_2)/2$  时, 视为分辨成功。

图 7(b) 表明, 在 DOA 间隔  $\Delta\theta \geq 8^\circ$  时, 所提算法分辨率稳定达到 100%。在  $\Delta\theta \geq 10^\circ$  时, MUSIC-NA、ESPRIT-NA 算法分辨率超过 95%;  $\Delta\theta \geq 12^\circ$  时, 两者的分辨率达 100%。而 OGSBI-ULA 算法在低信噪比下表现较差, 仅当  $\Delta\theta \geq 24^\circ$  时方能实现 100% 的分辨率。这充分验证了所提算法在低间隔、高干扰条件下的鲁棒性和优越性。

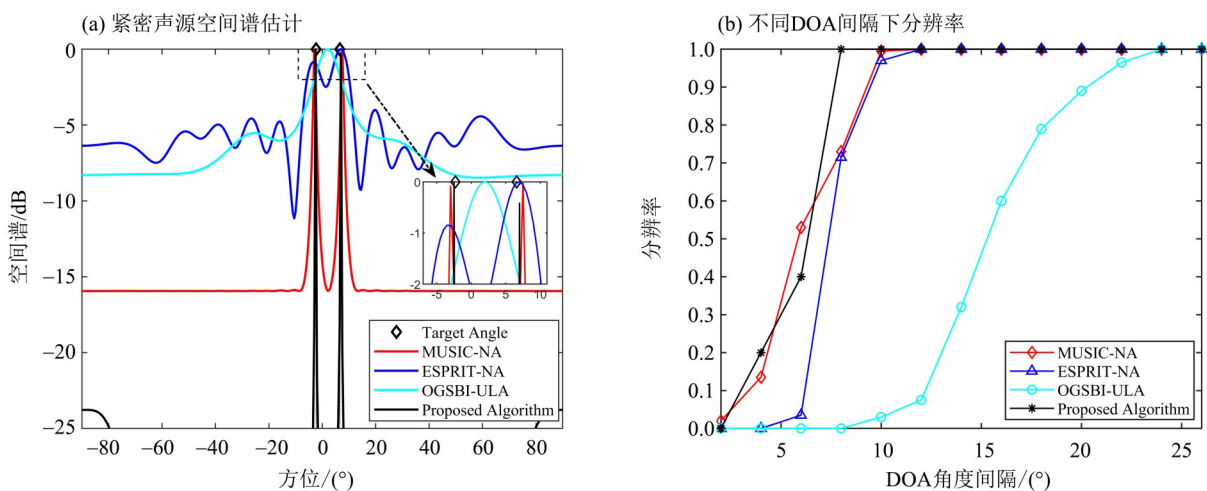


图 7 紧密声源 DOA 估计的性能

Fig. 7 Performance of DOA estimation for tight sound sources

## 5 海试数据验证

选用2018年大连庄河市王家岛海域的海试数据进行可行性验证。发射声源 UW350 置于水深 5 m 处,发射信号为 200~600 Hz 的宽带长脉冲,时长为 3 s,采样频率 10 kHz,收发船间距为 4 672 m(GPS 数据)。接收船布设 12 阵元均匀水听器阵列,置于水深 24 m 处,间距为半波长,海域海深为 25.5 m。本文采用阵元子采样的策略,从原始的 12 阵元均匀线阵中选取 1、2、3、4、8、12 号位置的阵元进行子采样,构成  $N_1 = N_2 = 3$  的物理嵌套阵列。该选取原则是使其阵元位置满足图 1 所示的二阶嵌套阵列阵元分布情

况,并以此为基础进行后续实验。

图 8 展示了快拍数为 500 的空间谱。选取单目标 ( $-17.2^\circ$ ) 与多目标  $[-17.2^\circ, 21.4^\circ]$  海试数据进行验证。结果表明:6 阵元 OGSBI-ULA 算法对目标方位估计存在较大偏差,12 阵元 OGSBI-ULA 算法对目标方位估计效果虽优于 6 阵元,但其仍存在部分伪峰,空间谱主瓣较宽,频谱增益较低;ESPRIT-NA 算法可大体估计单目标,但多目标时伪峰显著,影响真实方位分辨;MUSIC-NA 算法虽具备分辨能力,但其主瓣宽、空间谱增益低;相较之下,所提算法主瓣窄、空间谱增益高,能更准确地估计目标方位,验证了其可行性与可靠性。

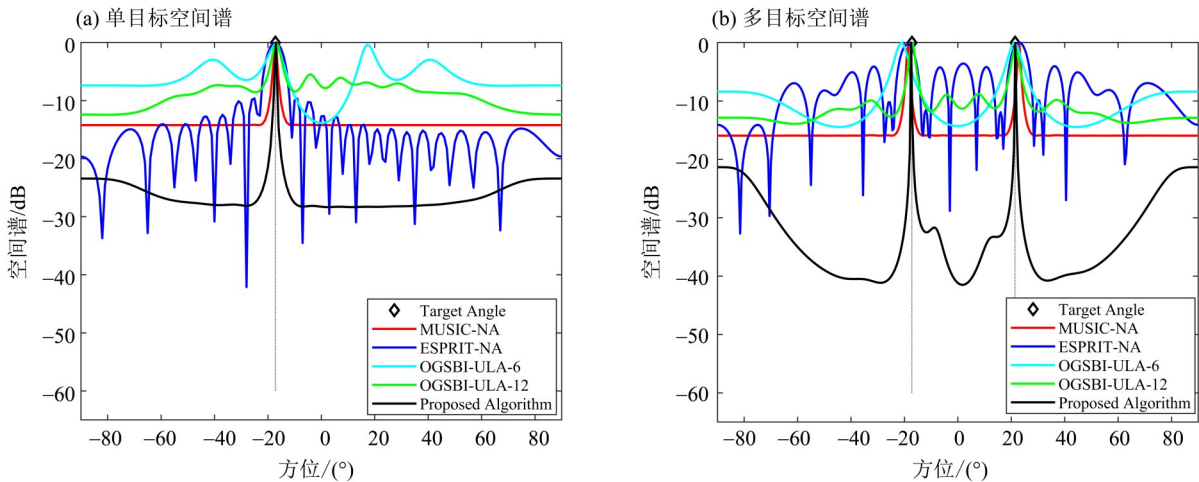


图 8 空间谱估计结果

Fig. 8 Spatial spectrum estimation results

## 6 结 语

针对传统算法在低信噪比、小快拍数条件下进行邻近多目标方位估计时估计性能差、空间分辨能力低的问题,提出了一种融合 Toeplitz 重构与特征值加权降噪的嵌套阵列离格稀疏贝叶斯水声信号方位估计方法。实验表明,引入特征值加权降噪策略后,分辨能力显著提升,并有效降低了 RMSE。与同结构下的 MUSIC-NA、ESPRIT-NA 算法及同阵元数的 OGSBI-ULA 算法相比,所提算法具有更高的

估计精度,仅使用 6 个阵元即可准确估计 11 个信源。在  $\text{SNR} = -15 \text{ dB}$  时,本文算法 RMSE 较上述 3 种算法分别提高了 53.11%、60.04%、67.23%。此外,该算法在低快拍数下仍保持优异的分辨能力,对紧邻多目标具有较高分辨率,显著提升了 DOA 估计精度,为水下目标定位提供了有力支持。但由于需构造大规模协方差矩阵,算法在大阵列和实时处理场景中开销较高。未来研究可聚焦于计算效率优化、复杂环境建模以及二维阵列扩展,以实现目标俯仰角与方位角的联合估计。

### 参考文献:

- 丁姗姗,张永顺,牛超,等,2015.一种基于 Khatri-Rao 子空间的非均匀稀疏阵列[J].空军工程大学学报(自然科学版),16(5):78-82.  
高卫港,王鼎,张钺洋,等,2023.基于贝叶斯压缩感知的子空

- 间拟合离格 DOA 估计[J].电讯技术,63(2):158-164.  
李荣禄,汤建龙,袁永强,2024.基于 TOEPLITZ 重构的压缩感知嵌套阵列 DOA 估计[J].雷达科学与技术,22(3):334-340.

- 刘振, 苏晓龙, 师俊朋, 等, 2023. 稀疏阵列波达方向估计研究进展[J]. 信息对抗技术, 2(Z1): 1-15.
- 卢俊, 张群飞, 史文涛, 等, 2021. 基于子空间加权的多重信号分类时延估计算法[J]. 探测与控制学报, 43(1): 30-35+40.
- 毛彦元, 马万禹, 司伟建, 2025. 嵌套阵列设计研究综述[J]. 航空兵器, 32(2): 34-47.
- 苏龙, 谷绍湖, 2022. 基于阵列协方差矩阵的 DOA 估计方法[J]. 计量与测试技术, 49(12): 7-10.
- 徐付佳, 杨泽宇, 孙文博, 等, 2025. 存在阵元姿态误差的声矢量圆阵特征结构方位估计[J]. 声学学报, 50(4): 964-972.
- 杨德森, 朱中锐, 时胜国, 等, 2014. 声矢量圆阵相位模态域目标方位估计[J]. 声学学报, 39(1): 19-26.
- FU H S, DAI F Z, HONG L, 2023. Off-grid error calibration for DOA estimation based on sparse Bayesian learning [J]. IEEE Trans Veh Technol, 72(12): 16293-16307.
- HE S, SUN N, YANG Z W, et al, 2025. The DOA estimation algorithm based on virtual domain block matching for nested arrays in the presence of mutual coupling [J]. IEEE Access, 13: 20427-20436.
- LU C J, ZHENG J B, YANG T Y, et al, 2023. DOA estimation based on coherent integration-sparse Bayesian learning with time-variant gain-phase errors [J]. IEEE Trans Aerosp Electron Syst, 59(6): 7951-7962.
- MALIOUTOV D, CETIN M, SWILLSKY A, 2005. A sparse signal reconstruction perspective for source localization with sensor arrays [J]. IEEE Trans Signal Process, 53(8): 3010-3022.
- MERKOFER J P, REVACH G, SHLEZINGER N, et al, 2023. DA-MUSIC: Data-driven DoA estimation via deep augmented MUSIC algorithm [J]. IEEE Trans Veh Technol, 73(2): 2771-2785.
- MOLAEI A M, ZAKERI B, ANDARGOLI S M H, et al, 2024. A comprehensive review of direction-of-arrival estimation and localization approaches in mixed-field sources scenario [J]. IEEE Access, 12: 65883-65918.
- PAL P, VAIDYANATHAN P P, 2010. Nested arrays: A novel approach to array processing with enhanced degrees of freedom [J]. IEEE Trans Signal Process, 58(8): 4167-4181.
- POTE R R, RAO B D, 2023. Maximum likelihood-based gridless DOA estimation using structured covariance matrix recovery and SBL with grid refinement [J]. IEEE Trans Signal Process, 71: 802-815.
- SHARMA U, AGRAWAL M, 2022. 2qth-Order cumulants based virtual array of a single acoustic vector sensor [J]. Digit Signal Process, 123: 103438.
- WANG M Z, NEHORAI A, 2017. Coarrays, MUSIC, and the Cramér-Rao bound [J]. IEEE Trans Signal Process, 65(4): 933-946.
- WANG Q S, YU H, LI J, et al, 2023. Adaptive grid refinement method for DOA estimation via sparse Bayesian learning [J]. IEEE J Ocean Eng, 48(3): 806-819.
- ZHANG Y H, LIANG N N, YANG Y X, et al, 2024. Fast sparse Bayesian learning based on beamformer power outputs to solve wideband DOA estimation in underwater strong interference environment [J]. Electronics, 13(8): 1456.

(责任编辑 王海蓉)