DOI：10. 11714/acta. snus. ZR20240046

不可压Navier-Stokes-Poisson-Nernst-Planck方程组大解的整体存在性*

靳荣，赵继红，陈浩

宝鸡文理学院数学与信息科学学院，陕西 宝鸡 721013

摘 要：研究了一类刻画电介质中带电粒子漂移、扩散和对流现象的电流体动力学模型.该模型在数学上表现为椭圆-抛物耦合的拟线性耗散型偏微分方程组，具有强非线性、非局部性和强耦合性等特点.基于对方程组代数结构的细致刻画以及选取恰当的权函数，建立了该方程组在临界Besov空间中具有任意大$\dot{B}^{-1}_{\infty,\infty}\times\dot{B}^{-2}_{\infty,\infty}\times\dot{B}^{-2}_{\infty,\infty}$-范数的初值所对应解的整体存在性.

关键词：电流体动力学；Navier-Stokes-Poisson-Nernst-Planck方程组；大解；整体存在性；Besov空间

中图分类号：O175.29 **文献标志码**：A **文章编号**：2097－0137(2026)02－0144－09

Global existence of large solutions for the incompressible Navier-Stokes-Poisson-Nernst-Planck equations

JIN Rong, *ZHAO Jihong*, *CHEN Hao*

School of Mathematics and Information Science, Baoji University Arts and Sciences, Baoji 721013, China

Abstract: A class of mathematical model arising from electrohydrodynamics, which is capable of describing the drift, diffusion and convection phenomena of charged particles in dielectrics, are studied. The model mathematically exhibits as the elliptic-parabolic coupled quasi-linear dissipative partial differential equations, and characterized by strong nonlinearity, non-locality and strong coupled properties. By introducing some proper weighted functions based on carefully examining the algebraic structure of the equations, we establish the global existence of solutions to this system with the $\dot{B}^{-1}_{\infty,\infty}\times\dot{B}^{-2}_{\infty,\infty}\times\dot{B}^{-2}_{\infty,\infty}$-norm initial data may be chosen arbitrary large.

Key words: electrohydrodynamics; Navier-Stokes-Poisson-Nernst-Planck equations; large solution; global existence; Besov spaces

本文主要研究一类电流体动力学中刻画电介质中带电粒子漂移、扩散和对流现象的数学模型.该模型中流体的运动由流体力学中经典的不可压Navier-Stokes方程组给出，而带电粒子密度函数的运动则由电动力学中的Poisson-Nernst-Planck方程组给出，其初值问题的具体形式如下：

* **收稿日期**：2024－02－13 **录用日期**：2025－11－09 **网络首发日期**：2026－01－05

基金项目：国家自然科学基金（12361034）；陕西省自然科学基金（2022JM-034）

作者简介：靳荣（2001年生），女；**研究方向**：偏微分方程；E-mail：zxcv02231029@163.com

通信作者：赵继红（1982年生），男；**研究方向**：偏微分方程；E-mail：jihzhao@163.com

$$\begin{cases}\partial_t u + u\cdot\nabla u - \Delta u + \nabla\pi = \Delta\phi\nabla\phi,\\ \nabla\cdot u = 0,\\ \partial_t N + u\cdot\nabla N = \nabla\cdot(\nabla N - N\nabla\phi),\\ \partial_t P + u\cdot\nabla P = \nabla\cdot(\nabla P + P\nabla\phi),\\ \Delta\phi = N - P,\\ (u,N,P)\big|_{t=0} = (u_0,N_0,P_0),\end{cases}\tag{1}$$

其中$u = u(x,t)\in\mathbb{R}^d$和$\pi = \pi(x,t)\in\mathbb{R}$分别表示速度场和压力场，$N = N(x,t)\in\mathbb{R}$和$P = P(x,t)\in\mathbb{R}$分别表示带正电荷和负电荷粒子的密度函数，$\phi = \phi(x,t)\in\mathbb{R}$表示静电势.

方程组(1)由Rubinstein(1990)于20世纪末首次提出，主要用来刻画等温不可压粘性流体中速度场和带电粒子密度函数之间的相互作用. 注意到方程组(1)中的第一个方程为刻画不可压缩流体运动的动量守恒方程，其右边的项为Lorentz力，具体可表示为

$$\Delta\phi\nabla\phi = \nabla\cdot\left(\nabla\phi\otimes\nabla\phi - \frac{1}{2}\left|\nabla\phi\right|^2 I\right).$$

因此从分析的角度可以将$\nabla\phi$和速度场u等同起来处理. 基于这一代数结构上的观察，Jerome(2002)利用Kato解析半群理论建立了方程组(1)解的局部存在性和唯一性. Zhao et al.(2010，2011)和Deng et al.(2011)中先后建立了方程组(1)在临界Lebesgue空间，Besov空间及Triebel-Lizorkin空间中解的局部存在性和小初值问题解的整体存在性.

当$d = 3$时，注意到速度场$u = (u^h, u^3)$的垂直分量u^3满足方程：

$$\partial_t u^3 - \Delta u^3 = -\mathrm{div}_h(u^h u^3) + 2u^3\,\mathrm{div}_h u^h - \partial_3\pi + \Delta\phi\partial_3\phi,$$

即u^3满足的方程是依赖于水平分量u^h和静电势ϕ的线性方程. 基于此观察，Zhao et al.(2015)证明了当$1 < q\leqslant p < 6,\ \frac{1}{p}+\frac{1}{q}\geqslant\frac{2}{3}$时，存在两个正常数$c_0$和$C_0$使得若初值$(u_0,N_0,P_0)$满足条件

$$\left(\left\|u_0^h\right\|_{\dot B^{-1+\frac{3}{p}}_{p,1}} + \left\|(N_0,P_0)\right\|_{\dot B^{-2+\frac{3}{q}}_{q,1}}\right)\exp\left\{C_0\left(\left\|u_0^3\right\|^2_{\dot B^{-1+\frac{3}{p}}_{p,1}} + 1\right)\right\}\leqslant c_0,$$

则方程组(1)存在唯一的整体解. 进一步，令$v := N - P, w := N + P$，从而可将方程组(1)约化为如下具有对称结构的方程组：

$$\begin{cases}\partial_t u + u\cdot\nabla u - \Delta u + \nabla\pi = -v\nabla(-\Delta)^{-1}v,\\ \nabla\cdot u = 0,\\ \partial_t v + u\cdot\nabla v = \nabla\cdot(\nabla v + w\nabla(-\Delta)^{-1}v),\\ \partial_t w + u\cdot\nabla w = \nabla\cdot(\nabla w + v\nabla(-\Delta)^{-1}v),\\ (u,v,w)\big|_{t=0} = (u_0,v_0,w_0),\end{cases}\tag{2}$$

其中$v_0 := N_0 - P_0, w_0 := N_0 + P_0$. 观察到方程组(2)中$w$满足的方程是依赖于速度场$u$和$v$的线性方程，从而期望不对初值$w_0$提任何小性条件要求，仍能保证解的整体存在性. 事实上，Ma(2018)证明了当$1\leqslant p < +\infty, 1\leqslant q < 6, q\leqslant 2p$且$\frac{1}{p}-\frac{1}{q} < \frac{1}{3} < \frac{1}{p}+\frac{1}{q}$时，存在两个正常数$c_0$和$C_0$使得若初值$(u_0,v_0,w_0)$满足条件

$$\left(\|u_0\|_{\dot B^{-1+\frac{3}{p}}_{p,1}} + \|v_0\|_{\dot B^{-2+\frac{3}{q}}_{q,1}}\right)\exp\left\{C_0\|w_0\|_{\dot B^{-2+\frac{3}{q}}_{q,1}}\right\}\leqslant c_0,$$

则方程组(2)存在唯一的整体解. 最近，观察到非线性项$v\nabla(-\Delta)^{-1}v$具有如下的分解：

$$\partial_{x_i} v\partial_{x_i}(-\Delta)^{-1}v = \frac{1}{2}\partial_{x_i}(-\Delta)\{((-\Delta)^{-1}v)(\partial_{x_i}(-\Delta)^{-1}v)\} + \partial_{x_i}\nabla\cdot\{((-\Delta)^{-1}v)(\nabla\partial_{x_i}(-\Delta)^{-1}v)\} + \frac{1}{2}\partial^2_{x_i}\{((-\Delta)^{-1}v)v\}.$$

Zhao et al.(2024)改进了Zhao et al.(2015)和Ma(2018)中的整体存在性结果，证明了当p,q,r满足某些条件时，存在两个正常数c_0和C_0使得若初值(u_0,v_0,w_0)满足条件

$$\left(\|u_0^h\|_{\dot B^{-1+\frac{3}{p}}_{p,1}} + \|v_0\|_{\dot B^{-2+\frac{3}{q}}_{q,1}}\right)\exp\left\{C_0\left[\|u_0^3\|^2_{\dot B^{-1+\frac{3}{p}}_{p,1}} + \left(\|w_0\|_{\dot B^{-2+\frac{3}{r}}_{r,1}} + 1\right)\exp\left\{C_0\|u_0^3\|_{\dot B^{-1+\frac{3}{p}}_{p,1}}\right\} + 1\right]\right\}\leqslant c_0,$$

则方程组(2)仍然存在唯一的整体解. 有关方程组(1)及(2)更多的大解的整体存在性结果可见Yang et al.

（2017），Xiao et al.（2023），Zhao et al.（2025）.

基于上述有关方程组(1)及(2)大解的整体存在性结果，本文将进一步寻求初值满足的充分条件，使得其对应的大解是整体存在的．在给出本文主要结果之前，先给出齐次Besov空间和Chemin-Lerner混合时空空间的概念.

定义 1 令 $\mathcal{C} := \left\{\xi \in \mathbb{R}^d, \frac{3}{4} \leqslant |\xi| \leqslant \frac{8}{3}\right\}$，则存在光滑径向函数 φ 满足：$\mathrm{supp}\,\varphi \subset \mathcal{C}$，$0 \leqslant \varphi \leqslant 1$，且 $\sum_{j\in\mathbb{Z}} \varphi(2^{-j}\xi) = 1, \forall \xi \in \mathbb{R}^d/\{0\}$．令 $h = \mathcal{F}^{-1}\varphi$，其中 $\mathcal{F}^{-1}$ 表示Fourier逆变换．对任意的 $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$，定义齐次二进制分解算子 Δ_j 为

$$\Delta_j f(x) := 2^{dj}\int_{\mathbb{R}^d} h(2^j y) f(x-y)\,\mathrm{d}y.$$

对于 $s \in \mathbb{R}, 1 \leqslant p, r \leqslant +\infty$，齐次Besov空间 $\dot{B}^s_{p,r}(\mathbb{R}^d)$ 可定义为

$$\dot{B}^s_{p,r}(\mathbb{R}^d) := \{f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)/\mathcal{P}(\mathbb{R}^d) : \|f\|_{\dot{B}^s_{p,r}} < +\infty\},$$

其中 $\mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$ 表示 $\mathbb{R}^d$ 上所有多项式全体构成的集合，且

$$\|f\|_{\dot{B}^s_{p,r}} := \begin{cases} \left(\sum_{j\in\mathbb{Z}} 2^{srj}\|\Delta_j f\|^r_{L^p}\right)^{\frac{1}{r}}, & 1 \leqslant r < +\infty, \\ \sup_{j\in\mathbb{Z}} 2^{sj}\|\Delta_j f\|_{L^p}, & r = +\infty. \end{cases}$$

定义 2 设 $s \in \mathbb{R}, 1 \leqslant p, r, \rho \leqslant +\infty, 0 < T \leqslant +\infty$，将Chemin-Lerner混合时空空间 $\mathcal{L}^\rho(0,T; \dot{B}^s_{p,r}(\mathbb{R}^d))$ 定义为空间 $\mathcal{C}([0,T]; \mathcal{S}(\mathbb{R}^d))$ 在如下范数下的完备化空间：

$$\|f\|_{\mathcal{L}^\rho_T(\dot{B}^s_{p,r})} := \left(\sum_{j\in\mathbb{Z}} 2^{jsr}\left(\int_0^T \|\Delta_j f(\cdot,t)\|^\rho_{L^p}\mathrm{d}t\right)^{\frac{r}{\rho}}\right)^{\frac{1}{r}} < +\infty.$$

注意到，当 $\rho = +\infty$ 或 $r = +\infty$ 时，上述范数需做相应的无穷范数的改动．并且，当 $T = +\infty$ 时，用符号 $\|\cdot\|_{\mathcal{L}^\rho_t(\dot{B}^s_{p,r})}$ 表示 $\|\cdot\|_{\mathcal{L}^\rho_\infty(\dot{B}^s_{p,r})}$.

其次，引入一些记号．令

$$E_{p,q,T} = \left\{(u,v,w) : u \in \mathcal{X}_{p,T}, (v,w) \in \mathcal{Y}_{q,T}\right\},$$

其中

$$\mathcal{X}_{p,T} := C\left([0,T], \dot{B}^{-1+\frac{d}{p}}_{p,1}(\mathbb{R}^d)\right) \cap \mathcal{L}^\infty\left(0,T; \dot{B}^{-1+\frac{d}{p}}_{p,1}(\mathbb{R}^d)\right) \cap L^1\left(0,T; \dot{B}^{1+\frac{d}{p}}_{p,1}(\mathbb{R}^d)\right),$$

$$\mathcal{Y}_{q,T} := C\left([0,T], \dot{B}^{-2+\frac{d}{q}}_{q,1}(\mathbb{R}^d)\right) \cap \mathcal{L}^\infty\left(0,T; \dot{B}^{-2+\frac{d}{q}}_{q,1}(\mathbb{R}^d)\right) \cap L^1\left(0,T; \dot{B}^{\frac{d}{q}}_{q,1}(\mathbb{R}^d)\right).$$

特别地，当 $T = +\infty$ 时，用 $E_{p,q}$ 表示 $E_{p,q,\infty}$.

本文的主要结果如下：

定理 1 设 $1 \leqslant q \leqslant p < +\infty$ 满足条件 $1 \leqslant q < 2d, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} > \frac{1}{d}$．则对任意的初值 $u_0 \in \dot{B}^{-1+\frac{d}{p}}_{p,1}(\mathbb{R}^d), \nabla \cdot u_0 = 0$，$v_0, w_0 \in \dot{B}^{-2+\frac{d}{q}}_{q,1}(\mathbb{R}^d)$，存在两个正常数 c_0 和 C_0 使得若初值 (u_0, v_0, w_0) 还满足条件

$$I_{p,q}(u_0,v_0,w_0)\exp\left\{C_0\left(\|u_0\|_{\dot{B}^{-1+\frac{d}{p}}_{p,1}} + \|(v_0,w_0)\|_{\dot{B}^{-2+\frac{d}{q}}_{q,1}}\right)\right\} \leqslant c_0, \tag{3}$$

那么方程组(2)存在唯一的整体解 $(u,v,w) \in E_{p,q}$．这里

$$I_{p,q}(u_0,v_0,w_0) := \|u_L \cdot \nabla u_L\|_{L^1_t(\dot{B}^{-1+\frac{d}{p}}_{p,1})} + \|u_L v_L\|_{L^1_t(\dot{B}^{-1+\frac{d}{q}}_{q,1})} + \|u_L w_L\|_{L^1_t(\dot{B}^{-1+\frac{d}{q}}_{q,1})} + \|v_L \nabla(-\Delta)^{-1} v_L\|_{L^1_t(\dot{B}^{-1+\frac{d}{q}}_{q,1})} + \|w_L \nabla(-\Delta)^{-1} v_L\|_{L^1_t(\dot{B}^{-1+\frac{d}{q}}_{q,1})},$$

且 $u_L := \mathrm{e}^{t\Delta}u_0, v_L := \mathrm{e}^{t\Delta}v_0, w_L := \mathrm{e}^{t\Delta}w_0$.

注 1 条件(3)表明，初值 (u_0,v_0,w_0) 的范数 $\|u_0\|_{\dot{B}^{-1+\frac{d}{p}}_{p,1}} + \|(v_0,w_0)\|_{\dot{B}^{-2+\frac{d}{q}}_{q,1}}$ 可以充分大，只需相应的 $I_{p,q}(u_0,v_0,w_0)$

充分小,仍能保证方程组(2)解的整体存在性.

注 2　Chemin et al.(2009)构造了一类初值 u_0 使得其 $\dot{B}^{-1}_{\infty,\infty}$-范数可以任意大,但非线性项 $u_L\cdot\nabla u_L$ 的 $L^1_t(\dot{B}^{-1+\frac{d}{p}}_{p,1})$-范数可以任意小;而 Zhao(2024)构造了一类初值 v_0 使得其 $\dot{B}^{-2}_{\infty,\infty}$-范数可以任意大,但非线性项 $v_L\nabla(-\Delta)^{-1}v_L$ 的 $L^1_t(\dot{B}^{-1+\frac{d}{q}}_{q,1})$-范数可以任意小;因此在定理 1 中我们建立了方程组(2)在临界 Besov 空间中一类具有任意大 $\dot{B}^{-1}_{\infty,\infty}\times\dot{B}^{-2}_{\infty,\infty}\times\dot{B}^{-2}_{\infty,\infty}$-范数的初值所对应解的整体存在性.

贯穿本文,C 和 $C_i(i=1,2,\cdots)$表示一致常数,符号 $x\lesssim y$ 表示存在正常数 C 使得 $x\leqslant Cy$.

1　解的加权先验估计

本节主要建立原方程组经热流扰动所得的扰动方程组在临界 Besov 空间中解的加权先验估计.为此,先回顾以下的几个主要引理,具体的证明可见 Bahouri et al.(2011), Zhao et al.(2017).

引理 1　设 $s\in\mathbb{R}$, $1\leqslant p,r\leqslant+\infty$, $0<T\leqslant+\infty$. 则对于任意的 $u_0\in\dot{B}^s_{p,r}(\mathbb{R}^d)$ 和 $f\in\mathcal{L}^1_T(\dot{B}^s_{p,r}(\mathbb{R}^d))$,非齐次热方程

$$\begin{cases}\partial_t u-\Delta u=f(x,t), & x\in\mathbb{R}^d, t>0,\\ u(x,0)=u_0(x), & x\in\mathbb{R}^d,\end{cases}$$

存在唯一的解 $u\in\mathcal{L}^\infty(0,T;\ \dot{B}^s_{p,r}(\mathbb{R}^d))\cap\mathcal{L}^1(0,T;\ \dot{B}^{s+2}_{p,r}(\mathbb{R}^d))$,且存在两个正常数 κ 和 C 使得

$$\|u\|_{\mathcal{L}^\infty_T(\dot{B}^s_{p,r})}+\kappa\|u\|_{\mathcal{L}^1_T(\dot{B}^{s+2}_{p,r})}\leqslant C\left(\|u_0\|_{\dot{B}^s_{p,r}}+\|f\|_{\mathcal{L}^1_T(\dot{B}^s_{p,r})}\right).$$

此外,当 $1\leqslant p,r<+\infty$ 时,有 $u\in C([0,T],\dot{B}^s_{p,r}(\mathbb{R}^d))$.

引理 2　设 $1\leqslant p_1,p_2\leqslant+\infty$, $s_1\leqslant\dfrac{d}{p_2}$, $s_2\leqslant\min\left\{\dfrac{d}{p_1},\dfrac{d}{p_2}\right\}$ 且 $s_1+s_2\geqslant d\max\left\{0,\dfrac{1}{p_1}+\dfrac{1}{p_2}-1\right\}$. 则对任意的 $f\in\dot{B}^{s_1}_{p_1,1}(\mathbb{R}^d)$, $g\in\dot{B}^{s_2}_{p_2,1}(\mathbb{R}^d)$,有 $fg\in\dot{B}^{s_1+s_2-d/p_1}_{p_2,1}(\mathbb{R}^d)$,且存在正常数 C 使得

$$\|fg\|_{\dot{B}^{s_1+s_2-d/p_1}_{p_2,1}}\leqslant C\|f\|_{\dot{B}^{s_1}_{p_1,1}}\|g\|_{\dot{B}^{s_2}_{p_2,1}}.$$

引理 3　设 $1\leqslant p,r\leqslant+\infty$, $s_1\leqslant s_2$, $0\leqslant\theta\leqslant 1$,则存在正常数 C 使得

$$\|u\|_{\dot{B}^s_{p,r}}\leqslant C\|u\|^\theta_{\dot{B}^{s_1}_{p,r}}\|u\|^{1-\theta}_{\dot{B}^{s_2}_{p,r}},$$

其中 $s=\theta s_1+(1-\theta)s_2$.

令 $u_L:=e^{t\Delta}u_0$, $\bar{u}:=u-u_L$; $v_L:=e^{t\Delta}v_0$, $\bar{v}:=v-v_L$; $w_L:=e^{t\Delta}w_0$, $\bar{w}:=w-w_L$. 则方程(2)可约化为如下的扰动方程组:

$$\begin{cases}\partial_t\bar{u}-\Delta\bar{u}=-(u_L+\bar{u})\cdot\nabla(u_L+\bar{u})-\nabla\pi-(v_L+\bar{v})\nabla(-\Delta)^{-1}(v_L+\bar{v}),\\ \nabla\cdot\bar{u}=0,\\ \partial_t\bar{v}-\Delta\bar{v}=-(u_L+\bar{u})\cdot\nabla(v_L+\bar{v})+\nabla\cdot[(w_L+\bar{w})\nabla(-\Delta)^{-1}(v_L+\bar{v})],\\ \partial_t\bar{w}-\Delta\bar{w}=-(u_L+\bar{u})\cdot\nabla(w_L+\bar{w})+\nabla\cdot[(v_L+\bar{v})\nabla(-\Delta)^{-1}(v_L+\bar{v})],\\ (\bar{u},\bar{v},\bar{w})\big|_{t=0}=(0,0,0).\end{cases}\tag{4}$$

接下来,推导方程组(4)的解 $\bar{u}$, $\bar{v}$ 和 $\bar{w}$ 所满足的加权估计. 为此,令

$$f(t):=\|u_L(t)\|_{\dot{B}^{1+\frac{d}{p}}_{p,1}}+\|v_L(t)\|_{\dot{B}^{\frac{d}{q}}_{q,1}}+\|w_L(t)\|_{\dot{B}^{\frac{d}{q}}_{q,1}}.$$

对任意的正实数 λ,引入权函数

$$\bar{u}_{\lambda,f}(x,t):=\bar{u}(x,t)\exp\left\{-\lambda\int_0^t f(\tau)\mathrm{d}\tau\right\}.$$

同理,可以定义权函数 $\bar{v}_{\lambda,f}(x,t)$ 和 $\bar{w}_{\lambda,f}(x,t)$.

1.1　$\bar{u}$ 的加权先验估计

将 Leray 投影算子 $\mathbb{P}$ 作用于方程组(4)中第 1 个方程的两端,并利用 Duhamel 原理,可将其约化为如下等价的积分方程组:

$$\bar{u}(t)=-\int_0^t \mathrm{e}^{(t-s)\Delta}\mathbb{P}\,[(u_L+\bar{u})\cdot\nabla(u_L+\bar{u})+(v_L+\bar{v})\nabla(-\Delta)^{-1}(v_L+\bar{v})]\,\mathrm{d}s. \tag{5}$$

因此，对于任意的$t\in(0,T]$，加权函数$\bar{u}_{\lambda,f}(x,t)$满足

$$\begin{aligned}\bar{u}_{\lambda,f}=&-\int_0^t \mathrm{e}^{(t-s)\Delta}\mathrm{e}^{-\lambda\int_0^t f(\tau)\mathrm{d}\tau}\mathbb{P}\,(u_L\cdot\nabla u_L)\,\mathrm{d}s-\int_0^t \mathrm{e}^{(t-s)\Delta}\mathrm{e}^{-\lambda\int_s^t f(\tau)\mathrm{d}\tau}\mathbb{P}\,[u_L\cdot\nabla\bar{u}_{\lambda,f}+\bar{u}_{\lambda,f}\cdot\nabla u_L+\bar{u}\cdot\nabla\bar{u}_{\lambda,f}]\,\mathrm{d}s\\&-\int_0^t \mathrm{e}^{(t-s)\Delta}\mathrm{e}^{-\lambda\int_0^t f(\tau)\mathrm{d}\tau}\mathbb{P}\,[v_L\nabla(-\Delta)^{-1}v_L]\,\mathrm{d}s\\&-\int_0^t \mathrm{e}^{(t-s)\Delta}\mathrm{e}^{-\lambda\int_s^t f(\tau)\mathrm{d}\tau}\mathbb{P}\,[v_L\nabla(-\Delta)^{-1}\bar{v}_{\lambda,f}+\bar{v}_{\lambda,f}\nabla(-\Delta)^{-1}v_L+\bar{v}\nabla(-\Delta)^{-1}\bar{v}_{\lambda,f}]\,\mathrm{d}s.\end{aligned} \tag{6}$$

利用引理1可得

$$\begin{aligned}\left\|\bar{u}_{\lambda,f}\right\|_{\mathcal{L}_t^\infty(\dot{B}_{p,1}^{-1+\frac{d}{p}})}+\kappa\left\|\bar{u}_{\lambda,f}\right\|_{L_t^1(\dot{B}_{p,1}^{1+\frac{d}{p}})}\leqslant&\left\|\mathrm{e}^{-\lambda\int_0^t f(\tau)\mathrm{d}\tau}\mathbb{P}\,(u_L\cdot\nabla u_L)\right\|_{L_t^1(\dot{B}_{p,1}^{-1+\frac{d}{p}})}+\left\|\mathrm{e}^{-\lambda\int_s^t f(\tau)\mathrm{d}\tau}\mathbb{P}\,(u_L\cdot\nabla\bar{u}_{\lambda,f})\right\|_{L_t^1(\dot{B}_{p,1}^{-1+\frac{d}{p}})}\\&+\left\|\mathrm{e}^{-\lambda\int_s^t f(\tau)\mathrm{d}\tau}\mathbb{P}\,(\bar{u}_{\lambda,f}\cdot\nabla u_L)\right\|_{L_t^1(\dot{B}_{p,1}^{-1+\frac{d}{p}})}+\left\|\mathrm{e}^{-\lambda\int_s^t f(\tau)\mathrm{d}\tau}\mathbb{P}\,(\bar{u}\cdot\nabla\bar{u}_{\lambda,f})\right\|_{L_t^1(\dot{B}_{p,1}^{-1+\frac{d}{p}})}\\&+\left\|\mathrm{e}^{-\lambda\int_0^t f(\tau)\mathrm{d}\tau}\mathbb{P}\,[v_L\nabla(-\Delta)^{-1}v_L]\right\|_{L_t^1(\dot{B}_{p,1}^{-1+\frac{d}{p}})}+\left\|\mathrm{e}^{-\lambda\int_s^t f(\tau)\mathrm{d}\tau}\mathbb{P}\,[v_L\nabla(-\Delta)^{-1}\bar{v}_{\lambda,f}]\right\|_{L_t^1(\dot{B}_{p,1}^{-1+\frac{d}{p}})}\\&+\left\|\mathrm{e}^{-\lambda\int_s^t f(\tau)\mathrm{d}\tau}\mathbb{P}\,[\bar{v}_{\lambda,f}\nabla(-\Delta)^{-1}v_L]\right\|_{L_t^1(\dot{B}_{p,1}^{-1+\frac{d}{p}})}+\left\|\mathrm{e}^{-\lambda\int_s^t f(\tau)\mathrm{d}\tau}\mathbb{P}\,[\bar{v}\nabla(-\Delta)^{-1}\bar{v}_{\lambda,f}]\right\|_{L_t^1(\dot{B}_{p,1}^{-1+\frac{d}{p}})}\\\coloneqq& I_1+I_2+I_3+I_4+I_5+I_6+I_7+I_8.\end{aligned} \tag{7}$$

下面，对$I_i(i=1,2,\cdots,8)$进行逐项估计．对于I_1，利用Leray投影算子$\mathbb{P}$在齐次Besov空间中的有界性，可得

$$I_1\lesssim\left\|u_L\cdot\nabla u_L\right\|_{L_t^1(\dot{B}_{p,1}^{-1+\frac{d}{p}})}. \tag{8}$$

对于I_2+I_3，注意到

$$u_L\cdot\nabla\bar{u}_{\lambda,f}+\bar{u}_{\lambda,f}\cdot\nabla u_L=\nabla\cdot\left(u_L\otimes\bar{u}_{\lambda,f}\right),$$

从而由引理2（取$p_1=p_2=p,s_1=s_2=d/p$）和引理3（取$\theta=1/2$）可得

$$\begin{aligned}I_2+I_3\lesssim&\int_0^t \mathrm{e}^{-\lambda\int_s^t f(\tau)\mathrm{d}\tau}\left\|u_L\cdot\nabla\bar{u}_{\lambda,f}+\bar{u}_{\lambda,f}\cdot\nabla u_L\right\|_{\dot{B}_{p,1}^{-1+\frac{d}{p}}}\mathrm{d}s\lesssim\int_0^t \mathrm{e}^{-\lambda\int_s^t f(\tau)\mathrm{d}\tau}\left\|u_L\otimes\bar{u}_{\lambda,f}\right\|_{\dot{B}_{p,1}^{\frac{d}{p}}}\mathrm{d}s\lesssim\int_0^t \mathrm{e}^{-\lambda\int_s^t f(\tau)\mathrm{d}\tau}\left\|u_L\right\|_{\dot{B}_{p,1}^{\frac{d}{p}}}\left\|\bar{u}_{\lambda,f}\right\|_{\dot{B}_{p,1}^{\frac{d}{p}}}\mathrm{d}s\\\lesssim&\int_0^t \mathrm{e}^{-\lambda\int_s^t f(\tau)\mathrm{d}\tau}\left\|u_L\right\|_{\dot{B}_{p,1}^{-1+\frac{d}{p}}}^{\frac{1}{2}}\left\|u_L\right\|_{\dot{B}_{p,1}^{1+\frac{d}{p}}}^{\frac{1}{2}}\left\|\bar{u}_{\lambda,f}\right\|_{\dot{B}_{p,1}^{-1+\frac{d}{p}}}^{\frac{1}{2}}\left\|\bar{u}_{\lambda,f}\right\|_{\dot{B}_{p,1}^{1+\frac{d}{p}}}^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}s\lesssim\int_0^t \mathrm{e}^{-\lambda\int_s^t f(\tau)\mathrm{d}\tau}\left(\varepsilon\left\|\bar{u}_{\lambda,f}\right\|_{\dot{B}_{p,1}^{1+\frac{d}{p}}}+\left\|u_L\right\|_{\dot{B}_{p,1}^{-1+\frac{d}{p}}}\left\|u_L\right\|_{\dot{B}_{p,1}^{1+\frac{d}{p}}}\left\|\bar{u}_{\lambda,f}\right\|_{\dot{B}_{p,1}^{-1+\frac{d}{p}}}\right)\mathrm{d}s\\\lesssim&\,\varepsilon\left\|\bar{u}_{\lambda,f}\right\|_{L_t^1(\dot{B}_{p,1}^{1+\frac{d}{p}})}+\frac{1}{\lambda}\left\|u_0\right\|_{\dot{B}_{p,1}^{-1+\frac{d}{p}}}\left\|\bar{u}_{\lambda,f}\right\|_{\mathcal{L}_t^\infty(\dot{B}_{p,1}^{-1+\frac{d}{p}})}.\end{aligned} \tag{9}$$

这里利用了下述两个结果：

$$\left\|u_L\right\|_{L_t^1(\dot{B}_{p,1}^{-1+\frac{d}{p}})}\leqslant\left\|u_L\right\|_{\mathcal{L}_t^\infty(\dot{B}_{p,1}^{-1+\frac{d}{p}})}\leqslant\left\|u_0\right\|_{\dot{B}_{p,1}^{-1+\frac{d}{p}}},$$

$$\int_0^t \mathrm{e}^{-\lambda\int_s^t f(\tau)\mathrm{d}\tau}\left\|u_L\right\|_{\dot{B}_{p,1}^{1+\frac{d}{p}}}\mathrm{d}s\leqslant\int_0^t \mathrm{e}^{-\lambda\int_s^t f(\tau)\mathrm{d}\tau}\left(\left\|u_L\right\|_{\dot{B}_{p,1}^{1+\frac{d}{p}}}+\left\|v_L\right\|_{\dot{B}_{q,1}^{\frac{d}{q}}}+\left\|w_L\right\|_{\dot{B}_{q,1}^{\frac{d}{q}}}\right)\mathrm{d}s=\int_0^t \mathrm{e}^{-\lambda\int_s^t f(\tau)\mathrm{d}\tau}f(s)\,\mathrm{d}s=\frac{1}{\lambda}\int_0^t \mathrm{d}\left(\mathrm{e}^{-\lambda\int_s^t f(\tau)\mathrm{d}\tau}\right)\leqslant\frac{1}{\lambda}.$$

对于I_4，类似可推得

$$I_4\lesssim\int_0^t \mathrm{e}^{-\lambda\int_s^t f(\tau)\mathrm{d}\tau}\left\|\bar{u}\otimes\bar{u}_{\lambda,f}\right\|_{\dot{B}_{p,1}^{\frac{d}{p}}}\mathrm{d}s\lesssim\int_0^t \mathrm{e}^{-\lambda\int_s^t f(\tau)\mathrm{d}\tau}\left\|\bar{u}\right\|_{\dot{B}_{p,1}^{-1+\frac{d}{p}}}^{\frac{1}{2}}\left\|\bar{u}\right\|_{\dot{B}_{p,1}^{1+\frac{d}{p}}}^{\frac{1}{2}}\left\|\bar{u}_{\lambda,f}\right\|_{\dot{B}_{p,1}^{-1+\frac{d}{p}}}^{\frac{1}{2}}\left\|\bar{u}_{\lambda,f}\right\|_{\dot{B}_{p,1}^{1+\frac{d}{p}}}^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}s\lesssim\left\|\bar{u}\right\|_{\mathcal{L}_t^\infty(\dot{B}_{p,1}^{-1+\frac{d}{p}})}\left\|\bar{u}_{\lambda,f}\right\|_{L_t^1(\dot{B}_{p,1}^{1+\frac{d}{p}})}. \tag{10}$$

对于I_5，由Besov空间的嵌入关系$\dot{B}_{q,1}^{-1+\frac{d}{q}}(\mathbb{R}^d)\subset\dot{B}_{p,1}^{-1+\frac{d}{p}}(\mathbb{R}^d)(1\leqslant q\leqslant p\leqslant+\infty)$可知

$$I_5\coloneqq\left\|\mathrm{e}^{-\lambda\int_0^t f(\tau)\mathrm{d}\tau}\left(v_L\nabla(-\Delta)^{-1}v_L\right)\right\|_{L_t^1(\dot{B}_{p,1}^{-1+\frac{d}{p}})}\lesssim\left\|v_L\nabla(-\Delta)^{-1}v_L\right\|_{L_t^1(\dot{B}_{q,1}^{-1+\frac{d}{q}})}. \tag{11}$$

对于I_6+I_7，注意到非线性项$v_L\nabla(-\Delta)^{-1}\bar{v}$满足如下代数结构：

$$v_L\nabla(-\Delta)^{-1}\bar{v}+\bar{v}\nabla(-\Delta)^{-1}v_L=-\nabla\cdot\left(\nabla(-\Delta)^{-1}v_L\nabla(-\Delta)^{-1}v\right).$$

从而再次利用引理2(取$p_1 = p_2 = q, s_1 = s_2 = d/q$)和引理3(取$\theta = 1/2$)可得

$$\begin{aligned} I_6 + I_7 &\lesssim \int_0^t e^{-\lambda\int_s^t f(\tau)d\tau} \|\nabla\cdot(\nabla(-\Delta)^{-1}v_L\nabla(-\Delta)^{-1}\bar v_{\lambda,f})\|_{\dot B_{p,1}^{-1+\frac{d}{p}}} ds \lesssim \int_0^t e^{-\lambda\int_s^t f(\tau)d\tau}\|\nabla(-\Delta)^{-1}v_L\nabla(-\Delta)^{-1}\bar v_{\lambda,f}\|_{\dot B_{q,1}^{\frac{d}{q}}} ds \\ &\lesssim \int_0^t e^{-\lambda\int_s^t f(\tau)d\tau}\|v_L\|_{\dot B_{q,1}^{-1+\frac{d}{q}}}\|\bar v_{\lambda,f}\|_{\dot B_{q,1}^{-1+\frac{d}{q}}} ds \lesssim \int_0^t e^{-\lambda\int_s^t f(\tau)d\tau}\|v_L\|^{\frac12}_{\dot B_{q,1}^{-2+\frac{d}{q}}}\|v_L\|^{\frac12}_{\dot B_{q,1}^{\frac{d}{q}}}\|\bar v_{\lambda,f}\|^{\frac12}_{\dot B_{q,1}^{-2+\frac{d}{q}}}\|\bar v_{\lambda,f}\|^{\frac12}_{\dot B_{q,1}^{\frac{d}{q}}} ds \\ &\lesssim \int_0^t e^{-\lambda\int_s^t f(\tau)d\tau}\left(\varepsilon\|\bar v_{\lambda,f}\|_{\dot B_{q,1}^{\frac{d}{q}}} + C(\varepsilon)\|v_0\|_{\dot B_{q,1}^{-2+\frac{d}{q}}}\|v_L\|_{\dot B_{q,1}^{\frac{d}{q}}}\|\bar v_{\lambda,f}\|_{\dot B_{q,1}^{-2+\frac{d}{q}}}\right)ds \lesssim \varepsilon\|\bar v_{\lambda,f}\|_{L_t^1(\dot B_{q,1}^{\frac{d}{q}})} + \frac{1}{\lambda}\|v_0\|_{\dot B_{q,1}^{-2+\frac{d}{q}}}\|v_{\lambda,f}\|_{\mathcal{L}_t^\infty(\dot B_{q,1}^{-2+\frac{d}{q}})}. \end{aligned} \tag{12}$$

对于I_8,注意到

$$\bar v\nabla(-\Delta)^{-1}\bar v_{\lambda,f} = -\frac12\nabla\cdot(\nabla(-\Delta)^{-1}\bar v\nabla(-\Delta)^{-1}\bar v_{\lambda,f}).$$

因此可类似推得

$$\begin{aligned} I_8 &\lesssim \int_0^t e^{-\lambda\int_s^t f(\tau)d\tau}\|\nabla(-\Delta)^{-1}\bar v\otimes\nabla(-\Delta)^{-1}\bar v_{\lambda,f}\|_{\dot B_{q,1}^{\frac{d}{q}}} ds \lesssim \int_0^t e^{-\lambda\int_s^t f(\tau)d\tau}\|\bar v\|^{\frac12}_{\dot B_{q,1}^{-2+\frac{d}{q}}}\|\bar v\|^{\frac12}_{\dot B_{q,1}^{\frac{d}{q}}}\|\bar v_{\lambda,f}\|^{\frac12}_{\dot B_{q,1}^{-2+\frac{d}{q}}}\|\bar v_{\lambda,f}\|^{\frac12}_{\dot B_{q,1}^{\frac{d}{q}}} ds \\ &\lesssim \|\bar v\|_{L_t^1(\dot B_{q,1}^{\frac{d}{q}})}\|\bar v_{\lambda,f}\|_{\mathcal{L}_t^\infty(\dot B_{q,1}^{-2+\frac{d}{q}})}. \end{aligned} \tag{13}$$

最后,将式(8)~(13)代入式(7)中,则存在正常数C_1使得

$$\begin{aligned} \|\bar u_{\lambda,f}\|_{\mathcal{L}_t^\infty(\dot B_{p,1}^{-1+\frac{d}{p}})} + \kappa\|\bar u_{\lambda,f}\|_{L_t^1(\dot B_{p,1}^{1+\frac{d}{p}})} \leqslant C_1\Big[&\|u_L\cdot\nabla u_L\|_{L_t^1(\dot B_{p,1}^{-1+\frac{d}{p}})} + \|v_L\nabla(-\Delta)^{-1}v_L\|_{L_t^1(\dot B_{q,1}^{-1+\frac{d}{q}})} + \varepsilon\left(\|\bar u_{\lambda,f}\|_{L_t^1(\dot B_{p,1}^{1+\frac{d}{p}})} + \|\bar v_{\lambda,f}\|_{L_t^1(\dot B_{q,1}^{-1+\frac{d}{q}})}\right) \\ &+\frac{1}{\lambda}\left(\|u_0\|_{\dot B_{p,1}^{-1+\frac{d}{p}}}\|\bar u_{\lambda,f}\|_{\mathcal{L}_t^\infty(\dot B_{p,1}^{-1+\frac{d}{p}})} + \|v_0\|_{\dot B_{q,1}^{-2+\frac{d}{q}}}\|\bar v_{\lambda,f}\|_{\mathcal{L}_t^\infty(\dot B_{q,1}^{-2+\frac{d}{q}})}\right) \\ &+\left(\|\bar u\|_{\mathcal{L}_t^\infty(\dot B_{p,1}^{-1+\frac{d}{p}})}\|\bar u_{\lambda,f}\|_{L_t^1(\dot B_{p,1}^{1+\frac{d}{p}})} + \|\bar v\|_{L_t^1(\dot B_{q,1}^{\frac{d}{q}})}\|\bar v_{\lambda,f}\|_{\mathcal{L}_t^\infty(\dot B_{q,1}^{-1+\frac{d}{q}})}\right)\Big]. \end{aligned} \tag{14}$$

1.2　$\bar v$的加权先验估计

类似于式(5)~(6)的推导,方程组(4)中的第3个方程等价于如下积分方程:

$$\bar v_{\lambda,f} = -\int_0^t e^{(t-s)\Delta}e^{-\lambda\int_0^t f(\tau)d\tau}[(u_L+\bar u)\cdot\nabla(v_L+\bar v)]ds - \int_0^t e^{-\lambda\int_0^t f(\tau)d\tau}e^{(t-s)\Delta}\nabla\cdot[(w_L+\bar w)\nabla(-\Delta)^{-1}(v_L+\bar v)]ds.$$

利用引理1可得

$$\begin{aligned} \|\bar v_{\lambda,f}\|_{\mathcal{L}_t^\infty(\dot B_{q,1}^{-2+\frac{d}{q}})} + \kappa\|\bar v_{\lambda,f}\|_{L_t^1(\dot B_{q,1}^{\frac{d}{q}})} \leqslant &\left\|e^{-\lambda\int_0^t f(\tau)d\tau}(u_L\cdot\nabla v_L)\right\|_{L_t^1(\dot B_{q,1}^{-2+\frac{d}{q}})} + \left\|e^{-\lambda\int_s^t f(\tau)d\tau}(\bar u_{\lambda,f}\cdot\nabla v_L)\right\|_{L_t^1(\dot B_{q,1}^{-2+\frac{d}{q}})} \\ &+\left\|e^{-\lambda\int_s^t f(\tau)ds}(\bar u\cdot\nabla\bar v_{\lambda,f})\right\|_{L_t^1(\dot B_{q,1}^{-2+\frac{d}{q}})} + \left\|e^{-\lambda\int_s^t f(\tau)ds}(u_L\cdot\nabla\bar v_{\lambda,f})\right\|_{L_t^1(\dot B_{q,1}^{-2+\frac{d}{q}})} \\ &+\left\|e^{-\lambda\int_0^t f(\tau)d\tau}(w_L\nabla(-\Delta)^{-1}v_L)\right\|_{L_t^1(\dot B_{q,1}^{-1+\frac{d}{q}})} + \left\|e^{-\lambda\int_s^t f(\tau)ds}(w_L\nabla(-\Delta)^{-1}\bar v_{\lambda,f})\right\|_{L_t^1(\dot B_{q,1}^{-1+\frac{d}{q}})} \\ &+\left\|e^{-\lambda\int_s^t f(\tau)ds}(\bar w_{\lambda,f}\nabla(-\Delta)^{-1}v_L)\right\|_{L_t^1(\dot B_{q,1}^{-1+\frac{d}{q}})} + \left\|e^{-\lambda\int_s^t f(\tau)ds}(\bar w\nabla(-\Delta)^{-1}\bar v_{\lambda,f})\right\|_{L_t^1(\dot B_{q,1}^{-1+\frac{d}{q}})} \\ &:= J_1+J_2+J_3+J_4+J_5+J_6+J_7+J_8. \end{aligned} \tag{15}$$

对于J_1,有

$$J_1 \lesssim \|u_L\cdot\nabla v_L\|_{L_t^1(\dot B_{q,1}^{-2+\frac{d}{q}})} \lesssim \|\nabla\cdot(u_Lv_L)\|_{L_t^1(\dot B_{q,1}^{-2+\frac{d}{q}})} \lesssim \|u_Lv_L\|_{L_t^1(\dot B_{q,1}^{-1+\frac{d}{q}})}. \tag{16}$$

对于J_2,利用引理2(取$p_1 = p, p_2 = q, s_1 = d/p, s_2 = -1 + d/p$)和引理3(取$\theta = 1/2$)可得

$$\begin{aligned} J_2 &\lesssim \int_0^t e^{-\lambda\int_s^t f(\tau)d\tau}\|\bar u_{\lambda,f}\cdot\nabla v_L\|_{\dot B_{q,1}^{-2+\frac{d}{q}}} ds \lesssim \int_0^t e^{-\lambda\int_s^t f(\tau)d\tau}\|\bar u_{\lambda,f}v_L\|_{\dot B_{q,1}^{-1+\frac{d}{q}}} ds \lesssim \int_0^t e^{-\lambda\int_s^t f(\tau)d\tau}\|\bar u_{\lambda,f}\|_{\dot B_{p,1}^{\frac{d}{p}}}\|v_L\|_{\dot B_{q,1}^{-1+\frac{d}{q}}} ds \\ &\lesssim \int_0^t e^{-\lambda\int_s^t f(\tau)d\tau}\|\bar u_{\lambda,f}\|^{\frac12}_{\dot B_{p,1}^{-1+\frac{d}{p}}}\|\bar u_{\lambda,f}\|^{\frac12}_{\dot B_{p,1}^{1+\frac{d}{p}}}\|v_L\|^{\frac12}_{\dot B_{q,1}^{-2+\frac{d}{q}}}\|v_L\|^{\frac12}_{\dot B_{q,1}^{\frac{d}{q}}} ds \lesssim \int_0^t e^{-\lambda\int_s^t f(\tau)d\tau}\left(\varepsilon\|\bar u_{\lambda,f}\|_{\dot B_{p,1}^{1+\frac{d}{p}}} + \|v_L\|_{\dot B_{q,1}^{-2+\frac{d}{q}}}\|v_L\|_{\dot B_{q,1}^{\frac{d}{q}}}\|\bar u_{\lambda,f}\|_{\dot B_{p,1}^{-1+\frac{d}{p}}}\right)ds \\ &\lesssim \varepsilon\|\bar u_{\lambda,f}\|_{L_t^1(\dot B_{p,1}^{1+\frac{d}{p}})} + \|v_0\|_{\dot B_{q,1}^{-2+\frac{d}{q}}}\int_0^t e^{-\lambda\int_s^t f(\tau)d\tau}\|v_L\|_{\dot B_{q,1}^{\frac{d}{q}}}\|\bar u_{\lambda,f}\|_{\dot B_{p,1}^{-1+\frac{d}{p}}} ds \lesssim \varepsilon\|\bar u_{\lambda,f}\|_{L_t^1(\dot B_{p,1}^{1+\frac{d}{p}})} + \frac{1}{\lambda}\|v_0\|_{\dot B_{q,1}^{-2+\frac{d}{q}}}\|\bar u_{\lambda,f}\|_{\mathcal{L}_t^\infty(\dot B_{p,1}^{-1+\frac{d}{p}})}. \end{aligned} \tag{17}$$

类似I_2的估计及$\bar u$的估计，应用相同的方法和技巧可证得：

$$J_3 \lesssim \int_0^t e^{-\lambda\int_s^t f(\tau)d\tau}\left\|\bar u\,\bar v_{\lambda,f}\right\|_{\dot B_{q,1}^{-1+\frac{d}{q}}}ds \lesssim \int_0^t (\|\bar u\|_{\dot B_{p,1}^{-1+\frac{d}{p}}}\|\bar v_{\lambda,f}\|_{\dot B_{q,1}^{\frac{d}{q}}} + \|\bar u_{\lambda,f}\|_{\dot B_{p,1}^{1+\frac{d}{p}}}\|\bar v\|_{\dot B_{q,1}^{-2+\frac{d}{q}}})ds$$
$$\lesssim \|\bar u\|_{\mathcal{L}_t^\infty(\dot B_{p,1}^{-1+\frac{d}{p}})}\|\bar v_{\lambda,f}\|_{L_t^1(\dot B_{q,1}^{\frac{d}{q}})} + \|\bar v\|_{\mathcal{L}_t^\infty(\dot B_{q,1}^{-2+\frac{d}{q}})}\|\bar u_{\lambda,f}\|_{L_t^1(\dot B_{p,1}^{1+\frac{d}{p}})}, \tag{18}$$

$$J_4 \lesssim \int_0^t e^{-\lambda\int_s^t f(\tau)d\tau}\left\|u_L\cdot\nabla\bar v_{\lambda,f}\right\|_{\dot B_{q,1}^{-2+\frac{d}{q}}}ds \lesssim \int_0^t e^{-\lambda\int_s^t f(\tau)d\tau}\left\|u_L\right\|_{\dot B_{p,1}^{\frac{d}{p}}}\left\|\bar v_{\lambda,f}\right\|_{\dot B_{q,1}^{-1+\frac{d}{q}}}ds \lesssim \int_0^t e^{-\lambda\int_s^t f(\tau)d\tau}\left\|u_L\right\|_{\dot B_{p,1}^{-1+\frac{d}{p}}}^{\frac12}\left\|u_L\right\|_{\dot B_{p,1}^{1+\frac{d}{p}}}^{\frac12}\left\|\bar v_{\lambda,f}\right\|_{\dot B_{q,1}^{-2+\frac{d}{q}}}^{\frac12}\left\|\bar v_{\lambda,f}\right\|_{\dot B_{q,1}^{\frac{d}{q}}}^{\frac12}ds$$
$$\lesssim \int_0^t e^{-\lambda\int_s^t f(\tau)d\tau}\left(\varepsilon\left\|\bar v_{\lambda,f}\right\|_{\dot B_{q,1}^{\frac{d}{q}}} + \left\|u_L\right\|_{\dot B_{p,1}^{-1+\frac{d}{p}}}\left\|u_L\right\|_{\dot B_{p,1}^{1+\frac{d}{p}}}\left\|\bar v_{\lambda,f}\right\|_{\dot B_{q,1}^{-2+\frac{d}{q}}}\right)ds \lesssim \varepsilon\left\|\bar v_{\lambda,f}\right\|_{L_t^1(\dot B_{q,1}^{\frac{d}{q}})} + \frac{1}{\lambda}\left\|u_0\right\|_{\dot B_{p,1}^{-1+\frac{d}{p}}}\left\|\bar v_{\lambda,f}\right\|_{\mathcal{L}_t^\infty(\dot B_{q,1}^{-2+\frac{d}{q}})}, \tag{19}$$

$$J_5 \lesssim \left\|w_L\nabla(-\Delta)^{-1}v_L\right\|_{L_t^1(\dot B_{q,1}^{-1+\frac{d}{q}})}, \tag{20}$$

$$J_6 \lesssim \int_0^t e^{-\lambda\int_s^t f(\tau)d\tau}\left\|w_L\nabla(-\Delta)^{-1}\bar v_{\lambda,f}\right\|_{\dot B_{q,1}^{-1+\frac{d}{q}}}ds \lesssim \int_0^t e^{-\lambda\int_s^t f(\tau)d\tau}\left\|w_L\right\|_{\dot B_{q,1}^{-1+\frac{d}{q}}}\left\|\bar v_{\lambda,f}\right\|_{\dot B_{q,1}^{-1+\frac{d}{q}}}ds$$
$$\lesssim \int_0^t e^{-\lambda\int_s^t f(\tau)d\tau}\left\|w_L\right\|_{\dot B_{q,1}^{-2+\frac{d}{q}}}^{\frac12}\left\|w_L\right\|_{\dot B_{q,1}^{\frac{d}{q}}}^{\frac12}\left\|\bar v_{\lambda,f}\right\|_{\dot B_{q,1}^{-2+\frac{d}{q}}}^{\frac12}\left\|\bar v_{\lambda,f}\right\|_{\dot B_{q,1}^{\frac{d}{q}}}^{\frac12}ds \lesssim \varepsilon\left\|\bar v_{\lambda,f}\right\|_{L_t^1(\dot B_{q,1}^{\frac{d}{q}})} + \frac{1}{\lambda}\left\|w_0\right\|_{\dot B_{q,1}^{-2+\frac{d}{q}}}\left\|\bar v_{\lambda,f}\right\|_{\mathcal{L}_t^\infty(\dot B_{q,1}^{-2+\frac{d}{q}})}, \tag{21}$$

$$J_7 \lesssim \varepsilon\left\|\bar w_{\lambda,f}\right\|_{L_t^1(\dot B_{q,1}^{\frac{d}{q}})} + \frac{1}{\lambda}\left\|v_0\right\|_{\dot B_{q,1}^{-2+\frac{d}{q}}}\left\|\bar w_{\lambda,f}\right\|_{\mathcal{L}_t^\infty(\dot B_{q,1}^{-2+\frac{d}{q}})}, \tag{22}$$

$$J_8 \lesssim \int_0^t e^{-\lambda\int_s^t f(\tau)d\tau}\left\|\bar w\nabla(-\Delta)^{-1}\bar v_{\lambda,f}\right\|_{\dot B_{q,1}^{-1+\frac{d}{q}}}ds \lesssim \int_0^t e^{-\lambda\int_s^t f(\tau)d\tau}\left\|\bar w\right\|_{\dot B_{q,1}^{\frac{d}{q}}}\left\|\bar v_{\lambda,f}\right\|_{\dot B_{q,1}^{-1+\frac{d}{q}}}ds \lesssim \left\|\bar w\right\|_{L_t^1(\dot B_{p,1}^{\frac{d}{p}})}\left\|\bar v_{\lambda,f}\right\|_{\mathcal{L}_t^\infty(\dot B_{p,1}^{-2+\frac{d}{p}})}. \tag{23}$$

将上述式(16)~(23)代入式(15)，则存在正常数C_2使得

$$\begin{aligned}\left\|\bar v_{\lambda,f}\right\|_{\mathcal{L}_t^\infty(\dot B_{q,1}^{-2+\frac{d}{q}})} + \kappa\left\|\bar v_{\lambda,f}\right\|_{L_t^1(\dot B_{q,1}^{\frac{d}{q}})} \leqslant C_2\Bigg[&\left(\left\|u_Lv_L\right\|_{L_t^1(\dot B_{q,1}^{-1+\frac{d}{q}})} + \left\|w_L\nabla(-\Delta)^{-1}v_L\right\|_{L_t^1(\dot B_{q,1}^{-1+\frac{d}{q}})}\right) + \varepsilon\left(\left\|\bar u_{\lambda,f}\right\|_{L_t^1(\dot B_{p,1}^{1+\frac{d}{p}})} + \left\|\bar v_{\lambda,f}\right\|_{L_t^1(\dot B_{q,1}^{\frac{d}{q}})}\right.\\ &\left.+\left\|\bar v_{\lambda,f}\right\|_{L_t^1(\dot B_{q,1}^{\frac{d}{q}})} + \left\|\bar w_{\lambda,f}\right\|_{L_t^1(\dot B_{q,1}^{\frac{d}{q}})}\right) + \frac{1}{\lambda}\left(\left\|v_0\right\|_{\dot B_{q,1}^{-2+\frac{d}{q}}}\left\|\bar u_{\lambda,f}\right\|_{\mathcal{L}_t^\infty(\dot B_{p,1}^{1+\frac{d}{p}})} + \left\|u_0\right\|_{\dot B_{p,1}^{-1+\frac{d}{p}}}\left\|v_{\lambda,f}\right\|_{\mathcal{L}_t^\infty(\dot B_{q,1}^{-2+\frac{d}{q}})}\right.\\ &\left.+\left\|w_0\right\|_{\dot B_{q,1}^{-2+\frac{d}{q}}}\left\|\bar v_{\lambda,f}\right\|_{\mathcal{L}_t^\infty(\dot B_{q,1}^{-2+\frac{d}{q}})} + \left\|v_0\right\|_{\dot B_{q,1}^{-2+\frac{d}{q}}}\left\|\bar w_{\lambda,f}\right\|_{\mathcal{L}_t^\infty(\dot B_{q,1}^{-2+\frac{d}{q}})}\right)\\ &+\left(\left\|\bar u\right\|_{\mathcal{L}_t^\infty(\dot B_{p,1}^{-1+\frac{d}{p}})}\left\|v_{\lambda,f}\right\|_{L_t^1(\dot B_{q,1}^{\frac{d}{q}})} + \left\|v\right\|_{\mathcal{L}_t^\infty(\dot B_{q,1}^{-2+\frac{d}{q}})}\left\|\bar u_{\lambda,f}\right\|_{L_t^1(\dot B_{p,1}^{1+\frac{d}{p}})} + \left\|\bar w\right\|_{L_t^1(\dot B_{q,1}^{\frac{d}{q}})}\left\|\bar v_{\lambda,f}\right\|_{\mathcal{L}_t^\infty(\dot B_{q,1}^{-2+\frac{d}{q}})}\right)\Bigg].\end{aligned} \tag{24}$$

1.3 $\bar w$的加权先验估计

类似于式(5)~(6)的推导，方程组(4)的第4个方程可以进一步改写为：

$$\bar w_{\lambda,f} = -\int_0^t e^{(t-s)\Delta}e^{-\lambda\int_0^t f(\tau)d\tau}[(u_L+\bar u)\cdot\nabla(w_L+\bar w)]ds - \int_0^t e^{-\lambda\int_0^t f(\tau)d\tau}e^{(t-s)\Delta}\nabla\cdot[(v_L+\bar v)\nabla(-\Delta)^{-1}(v_L+\bar v)]ds.$$

同理，由引理1可推得

$$\begin{aligned}\left\|\bar w_{\lambda,f}\right\|_{\mathcal{L}_t^\infty(\dot B_{q,1}^{-2+\frac{3}{q}})} + \kappa\left\|\bar w_{\lambda,f}\right\|_{L_t^1(\dot B_{q,1}^{\frac{d}{q}})} \leqslant &\left\|e^{-\int_0^t f(\tau)d\tau}(u_L\cdot\nabla w_L)\right\|_{L_t^1(\dot B_{q,1}^{-2+\frac{d}{q}})} + \left\|e^{-\int_s^t f(\tau)d\tau}(\bar u_{\lambda,f}\cdot\nabla w_L)\right\|_{L_t^1(\dot B_{q,1}^{-2+\frac{d}{q}})}\\ &+\left\|e^{-\int_s^t f(\tau)d\tau}(\bar u\cdot\nabla\bar w_{\lambda,f})\right\|_{L_t^1(\dot B_{q,1}^{-2+\frac{d}{q}})} + \left\|e^{-\int_s^t f(\tau)d\tau}(u_L\cdot\nabla\bar w_{\lambda,f})\right\|_{L_t^1(\dot B_{q,1}^{-2+\frac{d}{q}})}\\ &+\left\|e^{-\int_0^t f(\tau)d\tau}(v_L\nabla(-\Delta)^{-1}v_L)\right\|_{L_t^1(\dot B_{q,1}^{-1+\frac{d}{q}})} + \left\|e^{-\int_s^t f(\tau)d\tau}(v_L\nabla(-\Delta)^{-1}\bar v_{\lambda,f})\right\|_{L_t^1(\dot B_{q,1}^{-1+\frac{d}{q}})}\\ &+\left\|e^{-\int_s^t f(\tau)d\tau}(\bar v_{\lambda,f}\nabla(-\Delta)^{-1}v_L)\right\|_{L_t^1(\dot B_{q,1}^{-1+\frac{d}{q}})} + \left\|e^{-\int_s^t f(\tau)d\tau}(\bar v\nabla(-\Delta)^{-1}\bar v_{\lambda,f})\right\|_{L_t^1(\dot B_{q,1}^{-1+\frac{d}{q}})}\\ &\coloneqq K_1+K_2+K_3+K_4+K_5+K_6+K_7+K_8.\end{aligned} \tag{25}$$

应用估计$\bar u$及$\bar v$的方法和技巧，可证得

$$K_1 \lesssim \left\|u_Lw_L\right\|_{L_t^1(\dot B_{q,1}^{-1+\frac{d}{q}})}. \tag{26}$$

$$K_2 \lesssim \varepsilon\left\|\bar u_{\lambda,f}\right\|_{L_t^1(\dot B_{p,1}^{-1+\frac{d}{p}})} + \frac{1}{\lambda}\left\|w_0\right\|_{\dot B_{q,1}^{-2+\frac{d}{q}}}\left\|\bar u_{\lambda,f}\right\|_{\mathcal{L}_t^\infty(\dot B_{p,1}^{-1+\frac{d}{p}})}. \tag{27}$$

$$K_3 \lesssim \|\bar{u}\|_{\mathcal{L}_t^\infty(\dot{B}_{p,1}^{-1+\frac{d}{p}})}\|\bar{w}_{\lambda,f}\|_{L_t^1(\dot{B}_{q,1}^{\frac{d}{q}})} + \|\bar{w}\|_{\mathcal{L}_t^\infty(\dot{B}_{q,1}^{-2+\frac{d}{q}})}\|\bar{u}_{\lambda,f}\|_{L_t^1(\dot{B}_{p,1}^{1+\frac{d}{p}})}. \tag{28}$$

$$K_4 \lesssim \varepsilon\|\bar{w}_{\lambda,f}\|_{L_t^1(\dot{B}_{q,1}^{\frac{d}{q}})} + \frac{1}{\lambda}\|u_0\|_{\dot{B}_{p,1}^{-1+\frac{d}{p}}}\|\bar{w}_{\lambda,f}\|_{\mathcal{L}_t^\infty(\dot{B}_{q,1}^{-2+\frac{d}{q}})}. \tag{29}$$

$$K_5 \lesssim \|v_L\nabla(-\Delta)^{-1}v_L\|_{L_t^1(\dot{B}_{q,1}^{-1+\frac{d}{q}})}. \tag{30}$$

$$K_6 + K_7 \lesssim \varepsilon\|\bar{v}_{\lambda,f}\|_{L_t^1(\dot{B}_{q,1}^{\frac{d}{q}})} + \frac{1}{\lambda}\|v_0\|_{\dot{B}_{q,1}^{-2+\frac{d}{q}}}\|\bar{v}_{\lambda,f}\|_{\mathcal{L}_t^\infty(\dot{B}_{q,1}^{-2+\frac{d}{q}})}. \tag{31}$$

$$K_8 \lesssim \|\bar{v}\|_{L_t^1(\dot{B}_{q,1}^{\frac{d}{q}})}\|\bar{v}_{\lambda,f}\|_{\mathcal{L}_t^\infty(\dot{B}_{q,1}^{-2+\frac{d}{q}})}. \tag{32}$$

将式(26)~(32)代入式(25)，则存在正常数C_3使得：

$$\begin{aligned}\|\bar{w}_{\lambda,f}\|_{\mathcal{L}_t^\infty(\dot{B}_{q,1}^{-2+\frac{d}{q}})} + \kappa\|\bar{w}_{\lambda,f}\|_{L_t^1(\dot{B}_{q,1}^{\frac{d}{q}})} \leqslant C_3\Bigg[&\left(\|u_Lw_L\|_{L_t^1(\dot{B}_{q,1}^{-1+\frac{d}{q}})} + \|v_L\nabla(-\Delta)^{-1}v_L\|_{L_t^1(\dot{B}_{q,1}^{-1+\frac{d}{q}})}\right)\\ &+ \varepsilon\left(\|\bar{u}_{\lambda,f}\|_{L_t^1(\dot{B}_{p,1}^{-1+\frac{d}{p}})} + \|\bar{w}_{\lambda,f}\|_{L_t^1(\dot{B}_{q,1}^{\frac{d}{q}})} + \|\bar{v}_{\lambda,f}\|_{L_t^1(\dot{B}_{q,1}^{\frac{d}{q}})}\right)\\ &+ \frac{1}{\lambda}\left(\|w_0\|_{\dot{B}_{q,1}^{-2+\frac{d}{q}}}\|\bar{u}_{\lambda,f}\|_{\mathcal{L}_t^\infty(\dot{B}_{p,1}^{-1+\frac{d}{p}})} + \|u_0\|_{\dot{B}_{p,1}^{-1+\frac{d}{p}}}\|\bar{w}_{\lambda,f}\|_{\mathcal{L}_t^\infty(\dot{B}_{q,1}^{-2+\frac{d}{q}})} + \|v_0\|_{\dot{B}_{q,1}^{-2+\frac{d}{q}}}\|\bar{v}_{\lambda,f}\|_{\mathcal{L}_t^\infty(\dot{B}_{q,1}^{-2+\frac{d}{q}})}\right)\\ &+ \left(\|\bar{u}\|_{\mathcal{L}_t^\infty(\dot{B}_{p,1}^{-1+\frac{d}{p}})}\|\bar{w}_{\lambda,f}\|_{L_t^1(\dot{B}_{q,1}^{\frac{d}{q}})} + \|\bar{w}\|_{\mathcal{L}_t^\infty(\dot{B}_{q,1}^{-2+\frac{d}{q}})}\|\bar{u}_{\lambda,f}\|_{L_t^1(\dot{B}_{p,1}^{1+\frac{d}{p}})} + \|\bar{v}\|_{L_t^1(\dot{B}_{q,1}^{\frac{d}{q}})}\|\bar{v}_{\lambda,f}\|_{\mathcal{L}_t^\infty(\dot{B}_{q,1}^{-2+\frac{d}{q}})}\right)\Bigg].\end{aligned} \tag{33}$$

2　定理1的证明

注意到方程组(4)解的局部存在性已在Zhao et al.(2015，2017)中给出，用T^*表示局部解$(\bar{u},\bar{v},\bar{w})$的最大存在时间. 因此，为了证明定理1，只需证明在初始条件(3)下有$T^* = +\infty$. 用反证法，不妨假设$T^* < +\infty$，则对充分小的正常数c_0(其确切值将在后面确定)，定义T_0为

$$T_0 := \max\left\{t \in [0,T^*): \|\bar{u}\|_{\mathcal{L}_t^\infty(\dot{B}_{p,1}^{-1+\frac{d}{p}})} + \kappa\|\bar{u}\|_{L_t^1(\dot{B}_{p,1}^{1+\frac{d}{p}})} + \|(\bar{v},\bar{w})\|_{\mathcal{L}_t^\infty(\dot{B}_{q,1}^{-2+\frac{d}{q}})} + \kappa\|(\bar{v},\bar{w})\|_{L_t^1(\dot{B}_{q,1}^{\frac{d}{q}})} \leqslant c_0\right\}.$$

则由式(14)、式(24)和式(33)可知存在正常数C使得

$$\|\bar{u}\|_{\mathcal{L}_t^\infty(\dot{B}_{p,1}^{-1+\frac{d}{p}})} + \kappa\|u\|_{L_t^1(\dot{B}_{p,1}^{1+\frac{d}{p}})} + \|(\bar{v},\bar{w})\|_{\mathcal{L}_t^\infty(\dot{B}_{q,1}^{-2+\frac{d}{q}})} + \kappa\|(\bar{v},\bar{w})\|_{L_t^1(\dot{B}_{q,1}^{\frac{d}{q}})} \leqslant C\left[I_{p,q}(u_0,v_0,w_0) + \frac{1}{\lambda}\mathcal{K}_0\mathcal{K}_1 + \mathcal{K}_1\mathcal{K}_2 + \varepsilon\mathcal{K}_2\right]. \tag{34}$$

其中$\mathcal{K}_0$、$\mathcal{K}_1$、$\mathcal{K}_2$分别为

$$\mathcal{K}_0 := \|u_0\|_{\dot{B}_{p,1}^{-1+\frac{d}{p}}} + \|v_0\|_{\dot{B}_{q,1}^{-2+\frac{d}{q}}} + \|w_0\|_{\dot{B}_{q,1}^{-2+\frac{d}{q}}},\qquad \mathcal{K}_1 := \|\bar{u}_{\lambda,f}\|_{\mathcal{L}_t^\infty(\dot{B}_{p,1}^{-1+\frac{d}{p}})} + \|\bar{v}_{\lambda,f}\|_{\mathcal{L}_t^\infty(\dot{B}_{q,1}^{-2+\frac{d}{q}})} + \|\bar{w}_{\lambda,f}\|_{\mathcal{L}_t^\infty(\dot{B}_{q,1}^{-2+\frac{d}{q}})},$$

$$\mathcal{K}_2 := \|\bar{u}_{\lambda,f}\|_{L_t^1(\dot{B}_{p,1}^{1+\frac{d}{p}})} + \|\bar{v}_{\lambda,f}\|_{L_t^1(\dot{B}_{q,1}^{\frac{d}{q}})} + \|\bar{w}_{\lambda,f}\|_{L_t^1(\dot{B}_{q,1}^{\frac{d}{q}})}.$$

在式(34)中取λ充分大，ε充分小使得

$$\lambda \geqslant 4C\left(\|u_0\|_{\dot{B}_{p,1}^{-1+\frac{d}{p}}} + \|v_0\|_{\dot{B}_{q,1}^{-2+\frac{d}{q}}} + \|w_0\|_{\dot{B}_{q,1}^{-2+\frac{d}{q}}}\right),\qquad \varepsilon < \frac{\kappa}{2C}.$$

进一步可得

$$\|\bar{u}_{\lambda,f}\|_{\mathcal{L}_t^\infty(\dot{B}_{p,1}^{-1+\frac{d}{p}})} + \kappa\|\bar{u}_{\lambda,f}\|_{L_t^1(\dot{B}_{p,1}^{1+\frac{d}{p}})} + \|(\bar{v}_{\lambda,f},\bar{w}_{\lambda,f})\|_{\mathcal{L}_t^\infty(\dot{B}_{q,1}^{-2+\frac{d}{q}})} + \kappa\|(\bar{v}_{\lambda,f},\bar{w}_{\lambda,f})\|_{L_t^1(\dot{B}_{q,1}^{\frac{d}{q}})} \leqslant 2CI_{p,q}(u_0,v_0,w_0).$$

由此可知

$$\begin{aligned}&\|\bar{u}\|_{\mathcal{L}_t^\infty(\dot{B}_{p,1}^{-1+\frac{d}{p}})} + \kappa\|\bar{u}\|_{L_t^1(\dot{B}_{p,1}^{1+\frac{d}{p}})} + \|(\bar{v},\bar{w})\|_{\mathcal{L}_t^\infty(\dot{B}_{q,1}^{-2+\frac{d}{q}})} + \kappa\|(\bar{v},\bar{w})\|_{L_t^1(\dot{B}_{q,1}^{\frac{d}{q}})}\\ &\leqslant 2CI_{p,q}(u_0,v_0,w_0)\exp\left\{\int_0^t\left(\|u_L\|_{\dot{B}_{p,1}^{1+\frac{d}{p}}} + \|v_L\|_{\dot{B}_{q,1}^{\frac{d}{q}}} + \|w_L\|_{\dot{B}_{q,1}^{\frac{d}{q}}}\right)\mathrm{d}\tau\right\}\\ &\leqslant 2CI_{p,q}(u_0,v_0,w_0)\exp\left\{C\left(\|u_0\|_{\dot{B}_{p,1}^{-1+\frac{d}{p}}} + \|v_0\|_{\dot{B}_{q,1}^{-2+\frac{d}{q}}} + \|w_0\|_{\dot{B}_{q,1}^{-2+\frac{d}{q}}}\right)\right\}.\end{aligned} \tag{35}$$

综上所述，若在条件(3)中取足够大的C_0和足够小的c_0，则由式(35)可知对于所有的$t < T_0$，有

$$\|\bar{u}\|_{\mathcal{L}_t^\infty(\dot{B}_{p,1}^{-1+\frac{d}{p}})}+\kappa\|u\|_{L_t^1(\dot{B}_{p,1}^{1+\frac{d}{p}})}+\|(\bar{v},\bar{w})\|_{\mathcal{L}_t^\infty(\dot{B}_{q,1}^{-2+\frac{d}{q}})}+\kappa\|(\bar{v},\bar{w})\|_{L_t^1(\dot{B}_{q,1}^{\frac{d}{q}})}\leqslant\frac{c_0}{2}.$$

这与 T_0 的定义矛盾，因此 $T^*=+\infty$. 定理得证.

参考文献：

BAHOURI H，CHEMIN J Y，DANCHIN R，2011. Fourier analysis and nonlinear partial differential equations[M]. Heidelberg：Springer.

CHEMIN J Y，GALLAGHER I，2009. Wellposedness and stability results for the Navier-Stokes equations in R^3[J]. Ann Inst H Poincaré Anal Non Linéaire，26(2)：599−624.

DENG C，ZHAO J H，CUI S B，2011. Well-posedness for the Navier-Stokes-Nernst-Planck-Poisson system in Triebel-Lizorkin space and Besov space with negative indices[J]. J Math Anal Appl，377(1)：392−405.

JEROME J W，2002. Analytical approaches to charge transport in a moving medium[J]. Transp Theory Stat Phys，31(4/5/6)：333−366.

MA H T，2018. Global large solutions to the Navier-Stokes-Nernst-Planck-Poisson equations[J]. Acta Appl Math，157：129−140.

RUBINSTEIN I，1990. Electro−diffusion of ions[M]. Philadelphia：SIAM.

XIAO W L，KANG W Y，2023. Global large solutions to the Navier-Stokes-Nernst-Planck-Poisson equations in Fourier-Besov spaces[J]. Appl Anal，102(12)：3476−3488.

YANG M H，SUN J Y，2017. Gevrey regularity and existence of Navier-Stokes-Nernst-Planck-Poisson system in critical Besov spaces[J]. Commun Pure Appl Anal，16(5)：1617−1639.

ZHAO J H，2024. Global existence of large solutions for the parabolic-elliptic Keller-Segel system in Besov type spaces[J]. Appl Math Lett，149：108899.

ZHAO J H，DENG C，CUI S B，2010. Global well-posedness of a dissipative system arising in electrohydrodynamics in negative-order Besov spaces[J]. J Math Phys，51(9)：093101.

ZHAO J H，DENG C，CUI S B，2011. Well-posedness of a dissipative system modeling electrohydrodynamics in Lebesgue spaces[J]. Differ Equ Appl，3(3)：427−448.

ZHAO J H，LI Y，2024. Global existence of large solutions for the three-dimensional incompressible Navier-Stokes-Poisson-Nernst-Planck equations[J]. Math Meth Appl Sci，47(15)：11933−11952.

ZHAO J H，LI Y，CAI Z B，2025. Global existence and decay rates of large solutions for the 3D incompressible dissipative system modeling electro-hydrodynamics[OL/EB]. Authorea. DOI：10.22541/au.175249803.33338952/v1.

ZHAO J H，LIU Q，2017. Well-posedness and decay for the dissipative system modeling electro-hydrodynamics in negative Besov spaces[J]. J Differ Equ，263(2)：1293−1322.

ZHAO J H，ZHANG T，LIU Q，2015. Global well-posedness for the dissipative system modeling electro-hydrodynamics with large vertical velocity component in critical Besov space[J]. Discrete Contin Dyn Syst，35(1)：555−582.

（责任编辑 冯兆永）