

变分数阶混沌系统有限时间自适应滑模同步*

毛北行, 张伟, 王东晓, 焦建锋, 陈灿

郑州航空工业管理学院数学学院, 河南 郑州 450046

摘要: 研究降控制器变分数阶三阶三次混沌系统同步问题, 利用变分数阶稳定性理论及有限时间自适应滑模同步相关结论, 设计滑模函数与变分数阶自适应律, 获得系统有限时间滑模同步的条件, 针对三阶系统只需要设计 2 个控制器就能在有限时间内使变分数阶三阶三次混沌系统主从系统取得自适应滑模同步, 从而减少了控制器个数, 利用仿真算例检验结论的正确性.

关键词: 滑模; 变分数阶; 有限时间; 混沌系统

中图分类号: O231.2 **文献标志码:** A **文章编号:** 2097-0137(2026)02-0136-08

Variable-order fraction chaotic systems with finite-time adaptive sliding mode synchronization

MAO Beixing, ZHANG Wei, WANG Dongxiao, JIAO Jianfeng, CHEN Can

School of Mathematics, Zhengzhou University of Aeronautics, Zhengzhou 450046, China

Abstract: The synchronization problem of variable-order fractional third-order cubic chaotic system with reduced controller was studied. By using variable-fractional-order stability theory and finite-time adaptive sliding mode synchronization correlation conclusions, sliding mode function and variable-order fractional adaptive laws were designed to obtain the conditions of finite-time sliding mode synchronization. For the third-order system, only two controllers were designed to achieve adaptive sliding mode synchronization between the master and slave systems of the variable-order fractional third-order cubic chaotic system in finite time, thus reducing the number of controllers. Numerical simulations verified the correctness of the conclusion.

Key words: sliding mode; variable-order fractional; finite-time; chaotic system

自整数阶混沌系统同步被提出以来就倍受重视(Song et al., 2019; Sun et al., 2019). 由于分数阶微积分学研究方面的突破被迅速运用于分数阶混沌系统的同步并应用于诸如自动化、航天、气象、卫星与通讯等众多领域并取得很多成果. 另一方面, 滑模方法自上世纪 60 年代提出以来因其良好的鲁棒性和可移植性等特点被广泛应用于非线性混沌系统的控制与同步(毛北行等, 2021, 2023), 例如: 毛北行等(2021)利用自适应滑模方法研究高维分数阶混沌同步问题, 针对一类高阶混沌系统设计分数阶滑模面和自适应控制律, 利用终值定理和拉普拉斯变换得到滑模面稳定和误差趋于原点的充分条件. 毛北行等(2023)研究分数阶 PMSM 混沌系统自适应滑模同步, 文中设计的方法对抑制和消除永磁同步电机混沌系统具有一定的应用前景. 大量研究发现实际研究系统不能简单的由常值分数阶系统描述, 而现实世界中一些常见的物理现象记忆及遗

* 收稿日期: 2024-10-19 录用日期: 2025-09-18 网络首发日期: 2026-01-04

基金项目: 国家自然科学基金(12401655); 河南省自然科学基金(252300420350);
河南省高等学校重点科研项目计划基础研究专项(24ZX008)

作者简介: 毛北行(1976年生), 男; 研究方向: 分数阶混沌系统滑模同步; E-mail: maobeixing329@zua.edu.cn

全文阅读



ZR20240305

传特性可随时空和其他条件变化. 因此, 变分数阶系统比常值分数阶系统更能准确描述这些现象, 因而变分数阶系统建模方法和理论应运而生. 然而变分数阶系统混沌系统方面的研究成果相对较少. Jiang et al. (2020) 研究变分数阶混沌系统滑模控制, 文中引入了变分数阶微分算子, 根据变分数阶控制原理研究滑模控制问题, 文中使用的方法具有一定的创新性. Meng et al. (2022) 根据有限时间滑模理论研究变分数阶耦合混沌系统的控制问题, 给出了同步时间的估计范围, 这在一定程度上改进了 Jiang et al. (2020) 的研究结果和基本方法. 另一方面通过改变电路结构或调整非线性元件特性研究人员成功设计出各类混沌电路(秦铭宏等, 2022; 丁芝侠等, 2023; 王晓媛等, 2023; 吴朝俊等, 2024), 研究忆阻混沌系统的分析与电路实现, 文中的方法可以用来解决一类混沌电路实现问题. 深入研究了这种代表性结构的特殊混沌系统. 马啸宇等(2021) 针对蔡氏电路研究其图像加密问题, 该方面的研究在图像处理 and 保密通信领域具有广泛的应用前景. 付景超等(2024) 构建了三阶三次幂非线性混沌电路并研究自适应反馈控制与 H_∞ 控制问题. 付景超等(2024) 中的系统区别于以上电路系统, 且该类系统以往很少被研究过, 而该问题的解决对于混沌系统电子电路及图像加密方面应用较广. 以上研究的控制问题都是基于传统的控制方法, 设计的是一种全状态控制器, 本文提出降控制器研究方法, 而减少控制器个数对于降低控制成本显得尤为重要, 但同时也对控制问题本身提出很大挑战, 需要设计更加精巧和简洁的滑模函数, 从而取得良好的控制效果. 另外对实际系统而言若同步时间趋于无穷大就失去意义, 实际工程需要同步能在有限时间内取得. 基于以上原因, 本文根据变分数阶稳定性理论及有限时间自适应滑模同步相关结论研究降控制器变分数阶三阶三次混沌系统同步问题, 估计出系统取得同步所需时间, 依靠系统状态消除静差从而提高收敛速度、抑制和消除抖振, 针对三阶系统只需要设计两个控制器, 从而减少控制成本, 简化系统结构. 并根据 Matlab 数值仿真结果对结论进行数值验证.

1 系统描述

定义 1 (Jiang et al., 2020; Meng et al., 2022) Caputo 变分数阶导数定义为

$${}^c D_t^{\alpha(t)} x(t) = \frac{1}{\Gamma(1 - \alpha(t))} \int_0^t \frac{x(\tau)}{(t - \tau)^{1 - \alpha(t)}} d\tau,$$

其中 $\alpha(t) \in (0, 1]$ 为 Caputo 变分数阶阶数, 代表时变记忆特性, Γ 表示伽玛函数; 为表示方便起文中 ${}^c D_t^{\alpha(t)}$ 均用 $D_t^{\alpha(t)}$ 代替.

变分数阶三阶三次混沌系统可建模为

$$\begin{cases} D_t^{\alpha(t)} x_1 = ax_2 + bx_1 - cx_1^3, \\ D_t^{\alpha(t)} x_2 = 8.2x_1 - x_2 + dx_3, \\ D_t^{\alpha(t)} x_3 = -2.33x_2, \end{cases} \quad (1)$$

其中 $a = 1.57, b = 1.8, c = 0.74, d = 9.1, \alpha(t) = 0.98 - 0.005 \sin t$.

($x_1(0), x_2(0), x_3(0) = (0.1, -0.1, 0.1)$) 时, 系统(1)吸引子相图, 见图 1.

以系统(1)为主系统, 设计从系统如下

$$\begin{cases} D_t^{\alpha(t)} y_1 = ay_2 + by_1 - cy_1^3 + d_1(t) + u_1(t), \\ D_t^{\alpha(t)} y_2 = 8.2y_1 - y_2 + dy_3, \\ D_t^{\alpha(t)} y_3 = -2.33y_2 + d_2(t) + u_2(t), \end{cases} \quad (2)$$

其中 $d_i(t)$ 为外部扰动, $u_i(t)$ ($i = 1, 2$) 为控制器, 定义误差 $e_i(t) = y_i(t) - x_i(t), i = 1, 2, 3$.

式(2)与式(1)相减得

$$\begin{cases} D_t^{\alpha(t)} e_1 = ae_2 + be_1 + cx_1^3 - cy_1^3 + d_1(t) + u_1(t), \\ D_t^{\alpha(t)} e_2 = 8.2e_1 - e_2 + de_3, \\ D_t^{\alpha(t)} e_3 = -2.33e_2 + d_2(t) + u_2(t). \end{cases} \quad (3)$$

假设 1 $|d_i(t)| \leq \varepsilon, i = 1, 2$. 其中 ε 为未知常数.

假设 2 $|d_1(t)| < |e_1(t)|$.

假设 3 $\varepsilon < k_2$, 其中 $k_2 > 0$.

引理 1 (Jiang et al., 2020; Meng et al., 2022) 对于 $0 < \alpha(t) < 1$, 都有 $\frac{1}{2} D_t^{\alpha(t)} f^2(t) \leq f(t)^T D_t^{\alpha(t)} f(t)$,

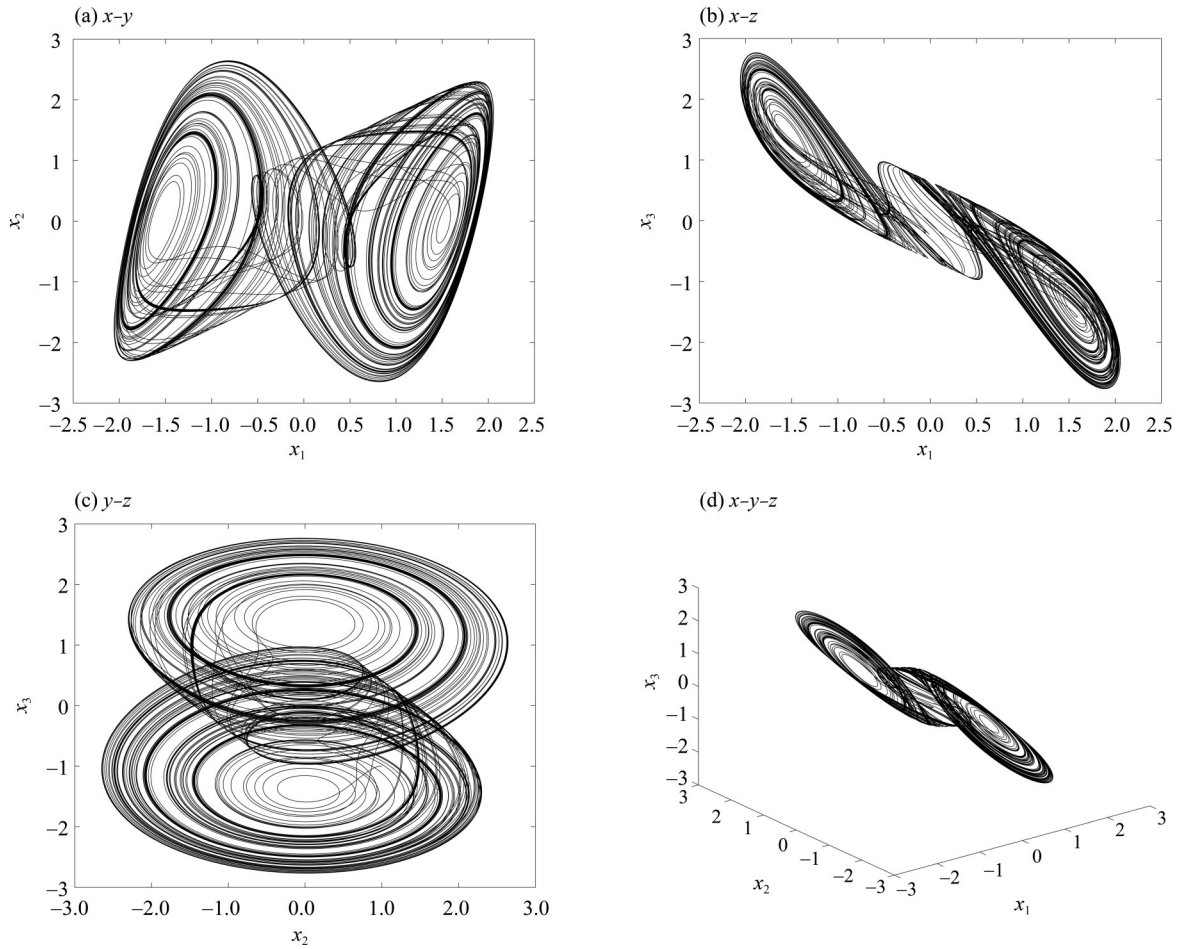


图1 系统(1)吸引子图

Fig. 1 System (1) attractor diagram

$\alpha(t) \in (0, 1)$.

引理 2(Meng et al., 2022) 当 $0 < \alpha_1 \leq \alpha(t) \leq \alpha_2 < 1$, 则有 $D_t^{\alpha(t)}V(t) \geq \frac{\Gamma(1 - \alpha_2)}{\Gamma(1 - \alpha_1)} D_t^{\alpha_2}V(t)$.

引理 3(刘恒等, 2015) 对于 $V(t) = \frac{1}{2}(z_1^2(t) + z_2^2(t))$, 若有 $k > 0$, 使 $D_t^\alpha V(t) \leq -kz_1^2(t)$ 成立. 则 $z_1^2(t) \leq 2V(0)E_{\alpha, 1}(-2kt^\alpha)$. 从而 $\lim_{t \rightarrow \infty} \|z_1(t)\| = 0$.

引理 4(Meng et al., 2022) 如果函数 $V(t)$ 连满足连续性, 如有 $0 < \alpha_1 \leq \alpha(t) \leq \alpha_2 < 1, \lambda > 0, 0 < \eta < 1$, 使得 $D_t^{\alpha(t)}V(t) \leq -\lambda V^\eta(t)$, 则对所有 $t \geq t_0^*$, 都满足 $V(t) = 0$, 则得到

$$t_0^* = \left[\frac{\Gamma(1 + \alpha_2)\Gamma(1 - \alpha_2)V^{1-\eta}(0)}{\lambda(1 - \eta)\Gamma(1 - \alpha_1)} \right]^{\frac{1}{\alpha_2}}.$$

2 主要结果

定理 1 如果 $0 < \alpha_1 \leq \alpha(t) \leq \alpha_2 < 1$, 假设 1~3 条件下, 构造滑模面 $s(t) = e_1(t) + e_3(t)$, 设计控制器如下:

$$\begin{aligned} u_1(t) &= -ae_2 - (b + 1)e_1 + c(y_1^3 - x_1^3) - \hat{e}s - k_1|s|^\delta \operatorname{sgn}s - k_2 \operatorname{sgn}s, \\ u_2(t) &= 2.33e_2 - e_3 - \hat{e}s - k_1|s|^\delta \operatorname{sgn}s - k_2 \operatorname{sgn}s; \end{aligned}$$

设计自适应律:

$$D_t^{\alpha(t)} \hat{e} = \begin{cases} 2|s(t)|^2, & \text{当 } 0 \leq |s| \leq 1 \text{ 时,} \\ 2, & \text{当 } |s| > 1 \text{ 时,} \end{cases}$$

其中 $k_1 > 0, k_2 > 0, 0 < \delta < 1$. 则主从系统(1)~(2)有限时间自适应滑模同步.

证明 由于滑模面上 $s = 0$, 将控制器 $u_1(t)$ 代入式(3)第一个方程, 得到 $D_t^{\alpha(t)} e_1 = -e_1 + d_1(t)$. 构造函数 $V(t) = \frac{1}{2} e_1(t)^2$, 由引理1, 得到

$$D_t^{\alpha(t)} V(t) \leq e_1(t) D_t^{\alpha(t)} e_1(t) = -e_1(t)^2 + e_1(t) d_1(t) < 0.$$

由假设2, 有 $e_1(t) \rightarrow 0$.

同理, 将控制器 $u_2(t)$ 代入式(3)第三个方程, 容易得到 $e_3(t) \rightarrow 0$.

由式(3)第二个方程 $D_t^{\alpha(t)} e_2 = 8.2e_1 - e_2 + de_3$, 且 $e_1(t), e_3(t) \rightarrow 0$, 因此上述方程变为 $D_t^{\alpha(t)} e_2 = -e_2$, 从而有 $e_2(t) \rightarrow 0$.

系统状态不在滑模面上运动时, 当 $|s| > 1$ 时可构造函数 $V(t) = \frac{1}{2} s^2 + \frac{1}{2} (|s| \hat{\varepsilon} - \varepsilon)^2$.

由设计 $D_t^{\alpha(t)} \hat{\varepsilon} = 2$, 利用引理1, 根据假设1和自适应律, 上式求分数阶导有

$$\begin{aligned} D_t^{\alpha(t)} V(t) &\leq s D_t^{\alpha(t)} s + 2(|s| \hat{\varepsilon} - \varepsilon) |s| \\ &\leq s[(ae_2 + be_1 + cx_1^3 - cy_1^3 + d_1(t) + u_1(t)) + (-2.33e_2 + d_2(t) + u_2(t))] + 2(|s| \hat{\varepsilon} - \varepsilon) |s| \\ &\leq s(-e_1 - e_3) + 2(\varepsilon |s| - \hat{\varepsilon} |s|^2) + 2(|s| \hat{\varepsilon} - \varepsilon) |s| - 2k_1 |s|^{\delta+1} - 2k_2 |s| \leq -|s|^2 < 0. \end{aligned}$$

由引理2得, $D_t^{\alpha_2} V \leq \frac{\Gamma(1-\alpha_1)}{\Gamma(1-\alpha_2)} D_t^{\alpha(t)} V \leq -\frac{\Gamma(1-\alpha_1)}{\Gamma(1-\alpha_2)} |s|^2$. 利用引理3, 系统(3)渐近趋近滑模面且闭环系统信号是有界的.

设计函数 $V(t) = \frac{1}{2} s^2$, 求分数阶导

$$\begin{aligned} D_t^{\alpha(t)} V(t) &\leq s D_t^{\alpha(t)} s \leq s[(ae_2 + be_1 + cx_1^3 - cy_1^3 + d_1(t) + u_1(t)) + (-2.33e_2 + d_2(t) + u_2(t))] \\ &\leq s(-e_1 - e_3) + 2(\varepsilon |s| - \hat{\varepsilon} |s|^2) - 2k_1 |s|^{\delta+1} - 2k_2 |s|. \end{aligned}$$

根据假设3, $D_t^{\alpha(t)} V(t) \leq -|s|^2 - 2k_1 |s|^{\delta+1} \leq -2k_1 |s|^{\delta+1} < 0$. 由引理4, 得到 $T = \left[\frac{\Gamma(1+q)V^{1-\delta}(0)}{2k_1 \cdot 2^{\frac{1-\delta}{2}}(1-\delta)} \right]^{\frac{1}{q}}$.

不在滑模面上, 当 $0 \leq |s| \leq 1$ 时, 可构造函数 $V(t) = \frac{1}{2} s^2 + \frac{1}{2} (\hat{\varepsilon} - \varepsilon)^2$. 设计自适应律 $D_t^{\alpha(t)} \hat{\varepsilon} = 2|s(t)|^2$, 求变分数阶导有

$$\begin{aligned} D_t^{\alpha(t)} V(t) &\leq s D_t^{\alpha(t)} s + 2(\hat{\varepsilon} - \varepsilon) |s|^2 \\ &\leq s[(ae_2 + be_1 + cx_1^3 - cy_1^3 + d_1(t) + u_1(t)) + (-2.33e_2 + d_2(t) + u_2(t))] + 2(\hat{\varepsilon} - \varepsilon) |s|^2 \\ &\leq -|s|^2 + 2(\varepsilon |s| - \hat{\varepsilon} |s|^2) + 2(\hat{\varepsilon} - \varepsilon) |s|^2 - 2k_1 |s|^{\delta+1} - 2k_2 |s|. \end{aligned}$$

根据假设3, $D_t^{\alpha(t)} V(t) \leq -|s|^2 \leq 0$. 故系统(3)的渐近趋近滑模面且闭环系统信号是有界的.

设计函数 $V(t) = \frac{1}{2} s^2$, 求分数阶导

$$\begin{aligned} D_t^{\alpha(t)} V(t) &\leq s D_t^{\alpha(t)} s \leq s[(ae_2 + be_1 + cx_1^3 - cy_1^3 + d_1(t) + u_1(t)) + (-2.33e_2 + d_2(t) + u_2(t))] \\ &\leq -|s|^2 + 2(\varepsilon |s| - \hat{\varepsilon} |s|^2) - 2k_1 |s|^{\delta+1} - 2k_2 |s|. \end{aligned}$$

根据假设3, $D_t^{\alpha(t)} V(t) \leq -|s|^2 - 2k_1 |s|^{\delta+1} \leq -2k_1 |s|^{\delta+1} < 0$. 利用引理4, 得到 $T = \left[\frac{\Gamma(1+q)V^{1-\delta}(0)}{2k_1 \cdot 2^{\frac{1-\delta}{2}}(1-\delta)} \right]^{\frac{1}{q}}$.

上述结论对常值分数阶混沌系统也成立, 以下考虑整数阶系统, 设计主系统(付景超等, 2024)如下:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = ax_2 + bx_1 - cx_1^3, \\ \dot{x}_2 = 8.2x_1 - x_2 + dx_3, \\ \dot{x}_3 = -2.33x_2. \end{cases} \quad (4)$$

当 $a = 1.57, b = 1.8, c = 0.74, d = 9.1$ 时, 系统(4)呈现吸引子特性, 如图2所示.

从系统设计为

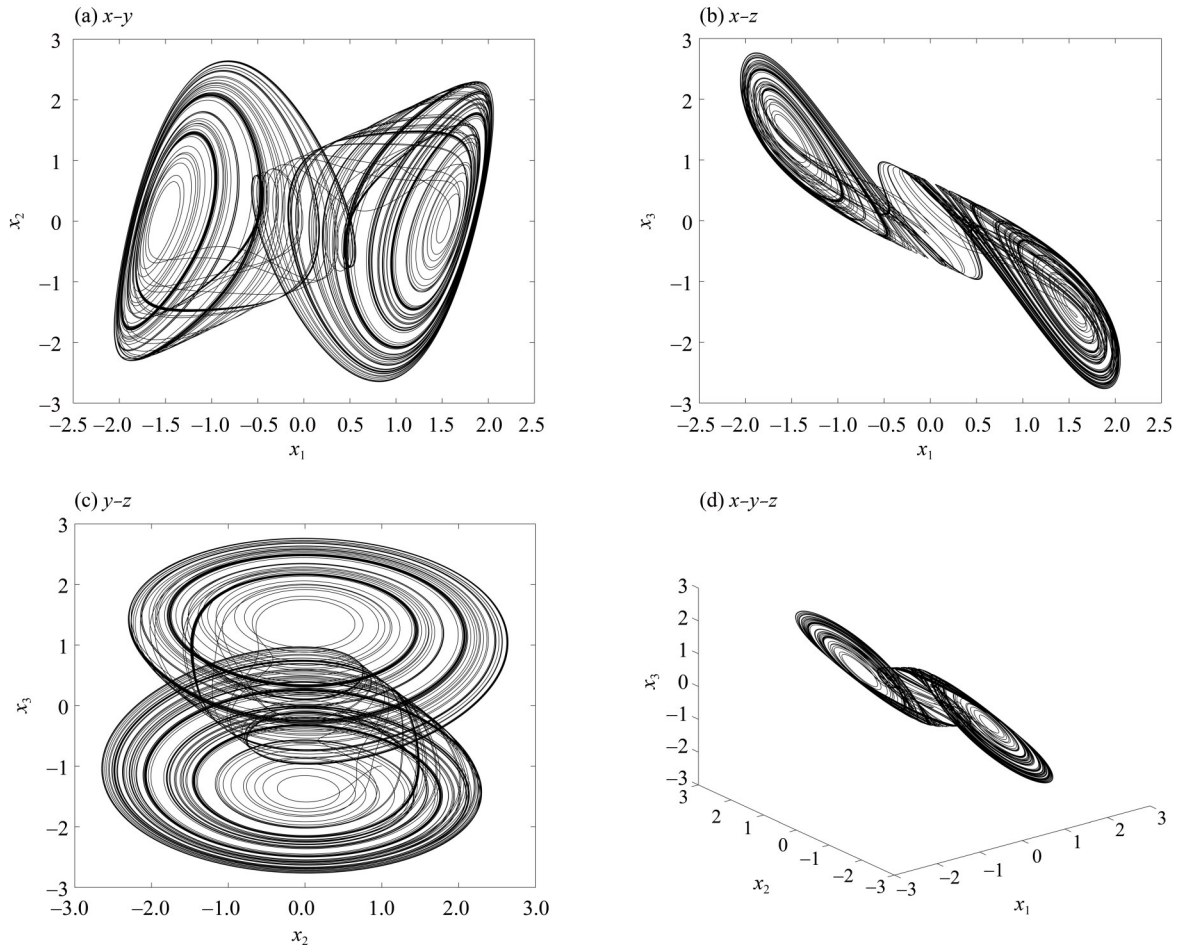


图2 系统(4)吸引子图

Fig. 2 System (4) attractor diagram

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = ay_2 + by_1 - cy_1^3 + d_1(t) + u_1(t), \\ \dot{y}_2 = 8.2y_1 - y_2 + dy_3, \\ \dot{y}_3 = -2.33y_2 + d_2(t) + u_2(t), \end{cases} \quad (5)$$

其中 $d_i(t)$ 为外部扰动, $u_i(t)$ ($i = 1, 2$) 为控制器, 定义误差 $e_i(t) = y_i(t) - x_i(t)$, $i = 1, 2, 3$.

式(5)与式(4)相减得

$$\begin{cases} \dot{e}_1 = ae_2 + be_1 + cx_1^3 - cy_1^3 + d_1(t) + u_1(t), \\ \dot{e}_2 = 8.2e_1 - e_2 + de_3, \\ \dot{e}_3 = -2.33e_2 + d_2(t) + u_2(t). \end{cases} \quad (6)$$

定理 2 假设 1~3 条件下, 构造滑模面 $s(t) = e_1(t) + e_3(t)$, 设计控制器如下:

$$\begin{aligned} u_1(t) &= -ae_2 - (b + 1)e_1 + c(y_1^3 - x_1^3) - \hat{\epsilon}s - k_1|s|^\delta \operatorname{sgn}s - k_2 \operatorname{sgn}s, \\ u_2(t) &= 2.33e_2 - e_3 - \hat{\epsilon}s - k_1|s|^\delta \operatorname{sgn}s - k_2 \operatorname{sgn}s; \end{aligned}$$

设计自适应律:

$$\dot{\hat{\epsilon}} = \begin{cases} 2|s(t)|^2, & \text{当 } 0 \leq |s| \leq 1 \text{ 时,} \\ 2, & \text{当 } |s| > 1 \text{ 时,} \end{cases}$$

其中 $k_1 > 0, k_2 > 0, 0 < \delta < 1$, 则主从系统(4)~(5)有限时间自适应滑模同步.

证明 滑模面上必有 $s = 0$, 将控制器 $u_1(t)$ 代入式(6)第一个方程, 得到 $\dot{e}_1 = -e_1 + d_1(t)$. 构造 $V(t) =$

$\frac{1}{2}e_1(t)^2$, 求导得到

$$\dot{V}(t) = e_1(t)\dot{e}_1(t) = -e_1(t)^2 + e_1(t)d_1(t) < 0.$$

由假设2, 得到 $e_1(t) \rightarrow 0$.

同理, 将 $u_2(t)$ 代入式(6)第三个方程, 得到 $e_3(t) \rightarrow 0$.

由式(6)第二个方程 $\dot{e}_2 = 8.2e_1 - e_2 + de_3$, 变为 $\dot{e}_2 = -e_2$, 从而有 $e_2(t) \rightarrow 0$.

系统状态不在滑模面上运动时, 当 $|s| > 1$ 时可构造函数 $V(t) = \frac{1}{2}s^2 + \frac{1}{2}(|s|\hat{\varepsilon} - \varepsilon)^2$. 此时设计 $\dot{\hat{\varepsilon}} = 2$, 根据假设1和自适应律, 上式求导有

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &= s\dot{s} + 2(|s|\hat{\varepsilon} - \varepsilon)|s| \\ &= s[(ae_2 + be_1 + cx_1^3 - cy_1^3 + d_1(t) + u_1(t)) + (-2.33e_2 + d_2(t) + u_2(t))] + 2(|s|\hat{\varepsilon} - \varepsilon)|s| \\ &= s(-e_1 - e_3) + 2(\varepsilon|s| - \hat{\varepsilon}|s|^2) + 2(|s|\hat{\varepsilon} - \varepsilon)|s| - 2k_1|s|^{\delta+1} - 2k_2|s| \leq -|s|^2 < 0. \end{aligned}$$

因此, 系统(6)渐近趋近滑模面且闭环系统信号是有界的,

设计函数 $V(t) = \frac{1}{2}s^2$, 求导得

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &\leq s\dot{s} = s[(ae_2 + be_1 + cx_1^3 - cy_1^3 + d_1(t) + u_1(t)) + (-2.33e_2 + d_2(t) + u_2(t))] \\ &\leq s(-e_1 - e_3) + 2(\varepsilon|s| - \hat{\varepsilon}|s|^2) - 2k_1|s|^{\delta+1} - 2k_2|s|. \end{aligned}$$

根据假设3, $\dot{V}(t) \leq -|s|^2 - 2k_1|s|^{\delta+1} \leq -2k_1|s|^{\delta+1} < 0$.

由引理3特殊情形得到 $T = \frac{V^{1-\delta}(0)}{2k_1 \cdot 2^{\frac{1-\delta}{2}}(1-\delta)}$.

不在滑模面上, 当 $0 \leq |s| \leq 1$ 时, 可构造函数 $V(t) = \frac{1}{2}s^2 + \frac{1}{2}(\hat{\varepsilon} - \varepsilon)^2$. 设计自适应律 $\dot{\hat{\varepsilon}} = 2|s(t)|^2$, 求导有

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &= s\dot{s} + 2(\hat{\varepsilon} - \varepsilon)|s|^2 \\ &= s[(ae_2 + be_1 + cx_1^3 - cy_1^3 + d_1(t) + u_1(t)) + (-2.33e_2 + d_2(t) + u_2(t))] + 2(\hat{\varepsilon} - \varepsilon)|s|^2 \\ &\leq -|s|^2 + 2(\varepsilon|s| - \hat{\varepsilon}|s|^2) + 2(\hat{\varepsilon} - \varepsilon)|s|^2 - 2k_1|s|^{\delta+1} - 2k_2|s|. \end{aligned}$$

根据假设3, $\dot{V}(t) \leq -|s|^2 \leq 0$. 系统(6)渐近趋近滑模面且闭环系统信号是有界的.

设计函数 $V(t) = \frac{1}{2}s^2$, 求导

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &= s\dot{s} = s[(ae_2 + be_1 + cx_1^3 - cy_1^3 + d_1(t) + u_1(t)) + (-2.33e_2 + d_2(t) + u_2(t))] \\ &\leq -|s|^2 + 2(\varepsilon|s| - \hat{\varepsilon}|s|^2) - 2k_1|s|^{\delta+1} - 2k_2|s| - |s|^2 - 2k_1|s|^{\delta+1} \leq -2k_1|s|^{\delta+1} < 0. \end{aligned}$$

根据假设3, 不难得到 $T = \frac{V^{1-\delta}(0)}{2k_1 \cdot 2^{\frac{1-\delta}{2}}(1-\delta)}$.

3 数值仿真

仅对定理1中变分数阶系统进行数值仿真, 外扰选取 $d_1(t) = 0.3\sin(3t)$, $d_2(t) = 0.3\cos(4t)$, $a = 1.57$, $b = 1.8$, $c = 0.74$, $d = 9.1$, $\alpha(t) = 0.98 - 0.005\sin t$. 初始值设置为 $(x_1(0), x_2(0), x_3(0)) = (0.1, -0.1, 0.1)$, $\delta = 0.5$, $\hat{\varepsilon}(0) = 0$, $k_1 = 1$, $k_2 = 1$. 设计控制器

$$\begin{aligned} u_1(t) &= -ae_2 - (b+1)e_1 + c(y_1^3 - x_1^3) - \hat{\varepsilon}s - k_1|s|^\delta \operatorname{sgn}s - k_2 \operatorname{sgn}s, \\ u_2(t) &= 2.33e_2 - e_3 - \hat{\varepsilon}s - k_1|s|^\delta \operatorname{sgn}s - k_2 \operatorname{sgn}s, \end{aligned}$$

滑模函数 $s(t) = e_1(t) + e_3(t)$, 设计自适应律 $D_t^{\alpha(t)}\hat{\varepsilon} = \begin{cases} 2|s(t)|^2, & \text{当 } 0 \leq |s| \leq 1 \text{ 时,} \\ 2, & \text{当 } |s| > 1 \text{ 时.} \end{cases}$

由仿真图3可看出, 加入控制器之前系统误差相差较大, 随着控制器的加入系统误差有限时间内快速趋于原点, 图4为控制器的变化曲线、图5为滑模函数的变化曲线、图6为驱动和响应系统状态变量曲线变化,

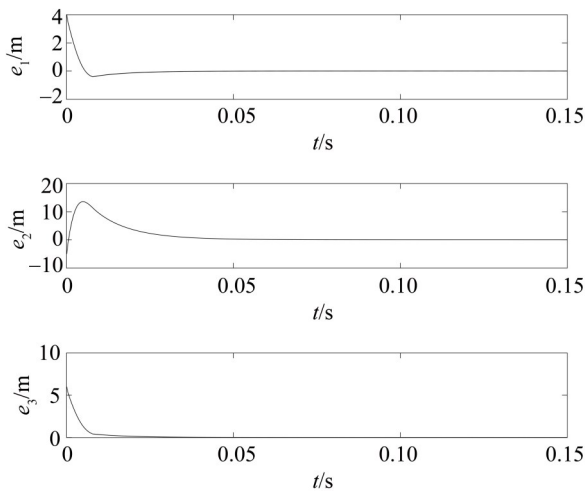


图3 定理1误差

Fig. 3 Errors in theorem1

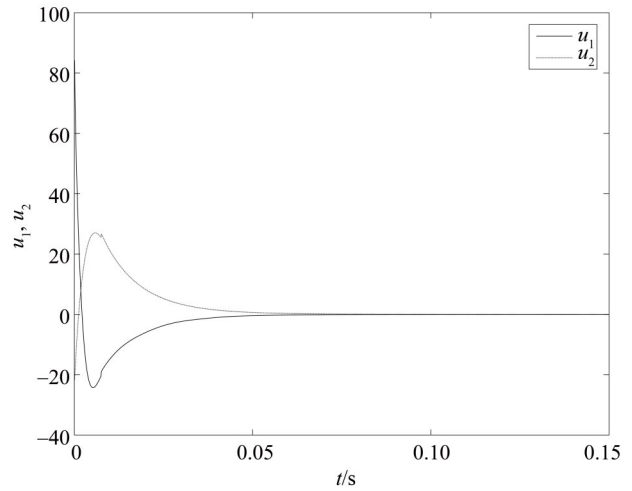


图4 定理1中控制器

Fig. 4 Controllers in theorem1

从图4可看出控制器初始时刻并不为零,随时间变化最终达到同步时控制器消失,此时不再需要控制器的控制作用也能趋于原点,从图5看出滑模函数一段时间以后逐渐向原点趋近,图6可看出一段时间后驱动响应系统状态变量逐渐趋于一致,从而系统误差、控制输入、滑动模态函数变化曲线均表明变分数阶三阶三次混沌系统取得有限时间滑模同步.

而传统方法滑模函数设计为 $s(t) = e_1(t) + e_2(t) + e_3(t)$,全维控制器设计为

$$u_1(t) = -ae_2 - (b + 1)e_1 + c(y_1^3 - x_1^3) - \hat{\epsilon}s - k_1|s|^\delta \operatorname{sgn}s - k_2 \operatorname{sgn}s,$$

$$u_2(t) = -8.2e_1 - de_3 - \hat{\epsilon}s - k_1|s|^\delta \operatorname{sgn}s - k_2 \operatorname{sgn}s,$$

$$u_3(t) = 2.33e_1 - e_3 - \hat{\epsilon}s - k_1|s|^\delta \operatorname{sgn}s - k_2 \operatorname{sgn}s.$$

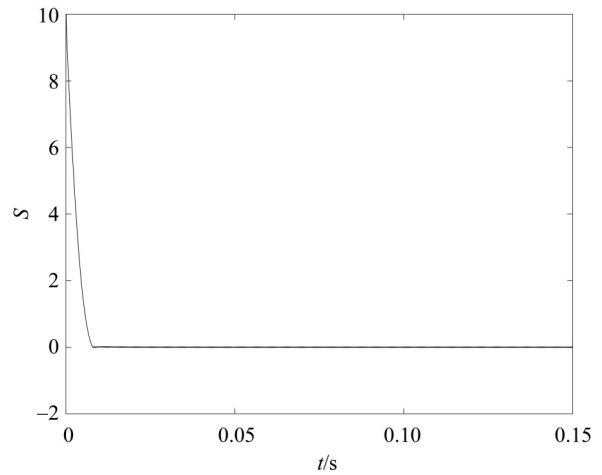


图5 定理1中滑模函数

Fig. 5 Sliding mode function in theorem1

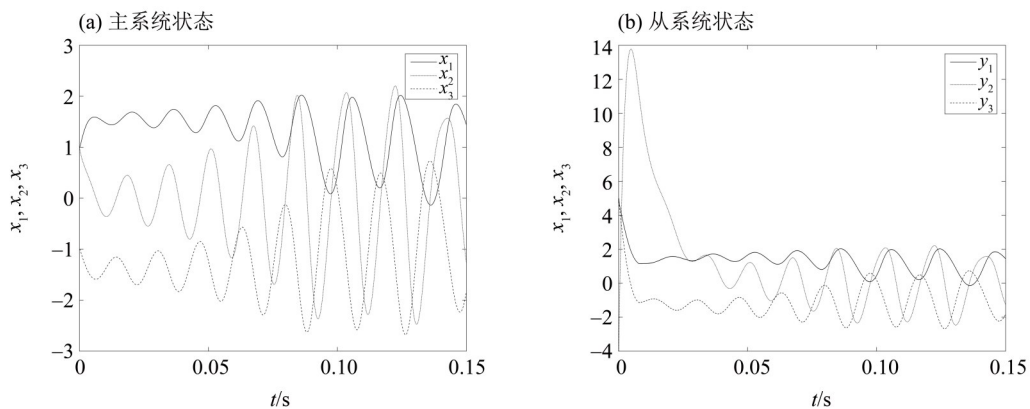


图6 定理1中主从系统状态变量

Fig. 6 master-slave system state variables in theorem1

从而多加了一个控制量,而实际控制效果一样,从而区别于传统方法,文中加少了控制器个数,从而价低了控制成本,因而显示出一定的优越性.

4 结论

通过设计滑模函数与变分数阶自适应律,根据有限时间同步控制理论和变分数阶微积分得到变分数阶三阶三次幂混沌系统有限时间自适应滑模同步的充分条件,对外扰的未知界及达到所需同步时间做出定量估计,用Matlab数值仿真对取得结论进行了验证,设计出快速趋近零且无抖振的滑模趋近律是下一步需要思考的问题.

参考文献:

- 丁芝侠,黄莎莉,李赛,等, 2023. 惠普忆阻电路的线性叠加分析[J]. 电子与信息学报, 45(7): 2659-2666.
- 付景超,杨阳, 2024. 三阶三次幂非线性混沌电路的自适应反馈控制和 H_∞ 控制[J]. 吉林大学学报(理学版), 62(3): 713-720.
- 刘恒,李生刚,孙业国,等, 2015. 带有未知非对称控制增益的不确定分数阶混沌系统自适应模糊同步控制[J]. 物理学报, 2015, 64(7): 070503.
- 马啸宇,张金生,李婷, 2021. 基于蔡氏电路和压缩感知的图像压缩加密方法[J]. 系统工程与电子技术, 43(9): 2407-2412.
- 毛北行,王东晓, 2021. 不确定分数阶高维混沌系统的自适应滑模同步[J]. 电子学报, 49(4): 775-780.
- 毛北行,王东晓, 2023. 分数阶永磁同步电机混沌系统自适应滑模同步[J]. 浙江大学学报(理学版), 50(5): 564-568.
- 秦铭宏,赖强,吴永红, 2022. 具有无穷共存吸引子的简单忆阻混沌系统的分析与实现[J]. 物理学报, 71(16): 160502.
- 王晓媛,田远泽,程知群, 2023. 基于二值和三值忆阻器模型构建的混沌系统的特性分析[J]. 电子与信息学报, 45(12): 4556-4565.
- 吴朝俊,方礼熠,杨宁宁, 2024. 含有偏置电压源的非齐次分数阶忆阻混沌电路动力学分析与实验研究[J]. 物理学报, 73(1): 010501.
- JIANG J F, CAO D Q, CHEN H T, 2020. Sliding mode control for a class of variable-order fractional chaotic systems[J]. J Frankl Inst, 357(15): 10127-10158.
- MENG X, GAO C C, JIANG B P, et al, 2022. Finite-time synchronization of variable-order fractional uncertain coupled systems via adaptive sliding mode control[J]. Int J Control Autom Syst, 20(5): 1535-1543.
- SONG S, ZHANG B Y, SONG X N, et al, 2019. Fractional-order adaptive neuro-fuzzy sliding mode H_∞ control for fuzzy singularly perturbed systems[J]. J Frankl Inst, 356(10): 5027-5048.
- SUN Z Y, DONG Y Y, CHEN C C, 2019. Global fast finite-time partial state feedback stabilization of high-order nonlinear systems with dynamic uncertainties[J]. Inf Sci, 484: 219-236.

(责任编辑 冯兆永)