

基于时域最小残值法求解面内非线性风力 涡轮机叶片系统的半解析解*

吴程驹^{1,2}, 吕中荣¹, 刘济科¹, 刘广^{1,2}

1. 中山大学航空航天学院, 广东 深圳 518107
2. 机械系统与振动全国重点实验室, 上海 200240

摘要:建立了风力涡轮机叶片面内运动的动力学模型, 基于哈密顿原理推导了叶片在平面内运动的非线性偏微分控制方程。建模过程中, 综合考虑了重力荷载、气动荷载以及大挠度引起的几何非线性效应, 构建了具有二阶非线性特征的连续系统动力学方程。通过 Galerkin 离散化方法, 采用悬臂梁模态函数结合恒定转速假设, 将原始偏微分方程简化为包含参数激励和直接激励的二阶非线性 Mathieu-Duffing 系统, 并采用时域最小残值法进行求解分析。研究表明, 在参数激励作用下, 系统表现出丰富的非线性动力学行为; 在特定参数区间内, 系统呈现稳定的周期运动特征; 而当控制参数变化时, 系统也可进入混沌运动状态。

关键词: 风力涡轮机; 叶片; 非线性振动; 时域最小残值法

中图分类号: V21 文献标志码: A 文章编号: 2097-0137(2025)06-0067-09

Semi-analytical solution of in-plane nonlinear wind turbine blade system based on the time-domain minimum residual method

WU Chengju^{1,2}, LÜ Zhongrong¹, LIU Jike¹, LIU Guang^{1,2}

1. School of Aeronautics and Astronautics, Sun Yat-sen University, Shenzhen 518107, China
2. The State Key Laboratory of Mechanical System and Vibration, Shanghai 200240, China

Abstract: This paper develops a dynamical model for the in-plane motion of wind turbine blades, systematically deriving nonlinear partial differential governing equations based on Hamilton's principle. The model incorporates gravitational loads, aerodynamic loads, and geometric nonlinearities induced by large deflections, to establish a continuous system characterized by second-order nonlinearities. Through Galerkin discretization with assumed cantilever mode function under constant rotational speed, the original partial differential equations are reduced to a second-order nonlinear Mathieu-Duffing system featuring both parametric excitation and direct external excitation. To investigate the bifurcation characteristics of this nonlinear dynamical system, an innovative time-domain minimum residual method is proposed and implemented. The results reveal rich nonlinear dynamical behaviors under parametric excitation: stable periodic oscillations dominate specific parameter regimes, while transitions to chaotic responses emerge through control parameter variations.

Key words: wind turbine; blades; nonlinear vibrations; time-domain minimum residual method

* 收稿日期: 2025-05-23 录用日期: 2025-07-02 网络首发日期: 2025-09-30

基金项目: 国家自然科学基金(12472060, 12302031);

广东省基础与应用基础研究基金(2023A1515010028, 2023A1515240046);

机械系统与振动全国重点实验室开放基金(MSV202402)

作者简介: 吴程驹(1999年生), 男; 研究方向: 非线性振动;

E-mail: wuchj6@mail2.sysu.edu.cn

通信作者: 刘广(1992年生), 男; 研究方向: 非线性振动; E-mail: liug36@mail.sysu.edu.cn

增强出版



ZR20250090

全文阅读



ZR20250090

风力发电的核心设备风力涡轮机的运行可靠性问题日益凸显,其中涡轮机叶片和传动系统是故障的高发区。国内外学者对风机涡轮机叶片做了大量研究。Acar et al.(2018)研究了风力涡轮机叶片在弯曲—弯曲—扭曲耦合振动下的动力学行为。Bagherpour et al.(2018)评估了叶片材料的弯曲—扭曲耦合可作为被动减轻叶片荷载的方法。Maktouf et al.(2019)研究了风力涡轮机叶片转速对固有频率和位移的影响。Salah et al.(2024)分析了叶片转速如何影响双转子风力涡轮机性能。高雪莲等(2024)对磁流变阻尼器(MRD)的风力发电机叶片阻尼力进行最优控制设计,研究了风力机叶片最优减振控制策略。穆永祥(2023)使用分段半解析法分析了大型风力发电机叶片的挥舞、摆振、扭转振动特性。周楠等(2024)建立了风力发电机叶片端到电机端的振动力矩传导模型。考虑风力发电机叶片尺寸的影响,郎启发(2024)对风力发电机叶片进行建模分析,研究了叶片动力学特性。

随着兆瓦级风机叶片不断增大,其柔性增大导致面内/面外耦合非线性显著,传统线性模型失效。此外,叶片—塔架相对运动产生的参数激励使系统出现 Mathieu-Duffing 复合特征,现有时域积分方法精度与效率受限。亟须基于半解析框架的高效工具,以揭示复杂分岔及准周期响应机理,并为结构减振提供理论支撑。本文的目标是将方程组简化,寻找到具有代表性的解析描述。因此,本文应用 Galerkin 方法,截取一阶模态,并应用假设的悬臂梁模态函数和恒定转速,得到一个二阶的非线性系统,然后把该二阶非线性系统简化为包含参数激励、直接激励的非线性 Mathieu-Duffing 方程,简化后的 Mathieu-Duffing 方程是本文的研究重点。

对于具有参数激励的系统,已经进行了不少的研究。Ng et al.(2002)研究了含一阶的立方非线性项的 Marthieu 方程在 2:1 谐振附近的非线性动力学行为。Ramakrishnan et al.(2023)使用多尺度法,分析了 Marthieu 方程的共振情况,揭示了 Marthieu 方程存在超谐波共振和次谐波共振的情况。牛江川等(2019)应用谐波增量法和平均法分析了参数激励系数和分数阶系数对 Mathieu-Duffing 亚谐波共振幅频响应的影响。解加全等(2024)采用多尺度法研究了含平方阻尼项的 Mathieu-Duffing 系统的共振和混沌。王德亮等(2023)使用基于 Tikhonov 正则化改进的谐波增量法求解 Mathieu-Duffing 方程多重解。张又又等(2012)使用随机平均法分析了包含谐和噪声和随机噪声联合参数激励的 Mathieu 系统的矩稳定性。黄建亮等(2021)使用增

量谐波平衡法分析了包含外激励的 val der Pol-Mathieu 方程的准周期运动和周期运动。

非线性 Mathieu-Duffing 方程动力学可作为风力涡轮机叶片运动的近似代表。本文创新性地采用新近提出的时域最小残值法(TMRM)(Liu et al., 2021a)来分析含参数激励和直接激励的非线性 Mathieu-Duffing 方程,以及参数变化对非线性 Mathieu-Duffing 方程的影响。其计算结果将作为揭示实际风力涡轮机叶片的气弹耦合失稳机制的重要理论依据。

1 风力涡轮机叶片模型的运动方程

如图 1 所示,考虑以长为 L 的柔性悬臂叶片安装在水平的刚性轮毂上。叶片以转速 Ω 绕水平旋转轴旋转,并在旋转平面内发生弯曲振动。由于本文聚焦于额定工况下的主要参数激励,实践和先前研究均表明,此时面外挠度及扭转—弯曲耦合对面内一阶响应影响甚微,故仅保留旋转平面内的弯曲自由度即可捕捉核心动力学特征,避免引入不必要的模型复杂度。定义原点在叶片根部的局部旋转坐标系 (e_x, e_y) 。取旋转叶片上一点 P ,点 P 未旋转变形前与水平旋转轴的距离为 r 。假设叶片旋转角度为 θ ,并在平面内发生了弯曲,弯曲收缩的距离为 s ,倾斜叶片的位移为 y 。

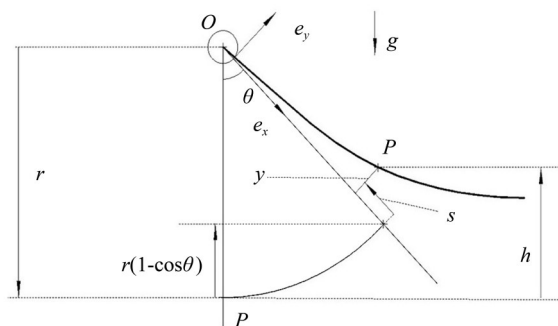


图 1 风力涡轮机叶片模型

Fig. 1 Wind turbine blade model

点 P 在局部坐标系下的坐标为

$$\mathbf{R} = [r - s(r, t)]\mathbf{e}_x + y(r, t)\mathbf{e}_y. \quad (1)$$

式(1)关于时间 t 求导,得到点 P 的速度:

$$\mathbf{v} = (-\dot{s} - \dot{\theta}y(r, t))\mathbf{e}_x + (\dot{\theta}[r - s(r, t)] + \dot{y}(r, t))\mathbf{e}_y.$$

叶片的总动能由局部坐标系下的动能和坐标系的旋转动能两部分组成,即

$$T = \int_0^L \frac{1}{2} m(r) \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} dr + \int_0^L \frac{1}{2} J(r) (y' + \dot{\theta})^2 dr, \quad (2)$$

其中 $m(r)$ 是叶片单位长度的质量, $J(r)$ 是叶片单位长度的质量惯性。旋转叶片的势能包括重力势能与弯曲势能。如图1所示,点 P 的高度 $h(r, t)$ 由旋转引起的倾斜、倾斜弯曲的收缩 $s(y, r, t)$ 和倾斜的叶片位移 $y(r, t)$ 三部分组成。

$$h(r, t) = r(1 - \cos\theta) + s(y, r, t)\cos\theta + y(r, t)\sin\theta,$$

$$\text{其中 } s(y, r, t) = \int_0^r \frac{y'^2}{2} + \frac{y'^4}{8} dr.$$

整个叶片的重力势能为

$$V_g = \int_0^L m(r)gh(r, t)dr \\ = \int_0^L m(r)g[r(1 - \cos\theta) + r(y, r, t)\cos\theta + y(r, t)\sin\theta] dr.$$

弯曲势能包含了几何非线性项,假设叶片弯曲的非线性曲率 $k = \frac{y''}{(1 + y'^2)^{3/2}}$, 曲率的平方使用泰勒级数展开为

$$k^2 \approx y''^2(1 - 3y'^2).$$

弯曲势能为

$$V_b = \int_0^L \frac{1}{2} EI(r)k^2 dr \approx \int_0^L \frac{1}{2} EI(r)y''^2(1 - 3y'^2) dr,$$

其中 E 是叶片的杨氏模量, $I(r)$ 是梁横截面的惯性矩。叶片的总势能

$$V = V_g + V_b. \quad (3)$$

采用 Hamilton 原理推导出叶片的运动微分方程

$$\int_0^L (\delta T - \delta V + \delta W) dt = 0, \quad (4)$$

其中 W 表示外力做功, δ 表示变分算子。将式(2)~(3)代入式(4)中,构造 δT , δV 和 δW , 并采用分部积分获取被积函数中的 δy 项,即可得到关于位移 δy 变化的旋转叶片的运动微分方程。

风力涡轮机的叶片转速受叶片上的空气动力和轮毂的力矩影响。叶片真实转速是一个缓慢变化的量。为了简化方程,本文先从固定转速研究叶片振动,即 $\theta = \Omega t$ 。固定转速下叶片运动的微分方程为

$$mgs\sin(\Omega t) = -m[a(\ddot{s}, s, \dot{y}, r, t) + g\cos(\Omega t)](y' + y'^3/2) \\ - \int_r^L m[a(\ddot{s}, s, \dot{y}, z, t) + g\cos(\Omega t)] dz \\ \times (y' + y'^3/2)' - mb(\ddot{y}, y, \dot{s}, r, t) + [J(r)y']' \\ - (EIy'' - 3EIy''y'^2)'' - (3EIy''^2y')' \\ + f(y, \dot{y}, s, \dot{s}, r, t), \quad (5)$$

其中

$$a(\ddot{s}, s, \dot{y}, r, t) = \ddot{s} + 2\Omega\dot{y} + \Omega^2(r - s),$$

$$b(\ddot{y}, y, \dot{s}, r, t) = -\ddot{y} + \Omega^2y + 2\Omega\dot{s} + f(y, \dot{y}, s, \dot{s}, r, t)$$

表示叶片上的气动荷载。

从式(5)可知,叶片的运动微分方程有几何非线性项、线性项。而且方程中还有参数激励项,即包含有 $\cos(\Omega t)$ 的项和相同频率的直接激励项 $mgs\sin(\Omega t)$ 。这激励项都来自重力势能。气动荷载项 $f(y, \dot{y}, s, \dot{s}, r, t)$ 也可能包含有额外的参数激励项。 EI 项源自弯曲势能。叶片在根部 $r = 0$ 处夹紧,是固定段。在 $r = L$ 处于自由,是自由端。叶片的边界条件为

$$y(0, t) = 0, \quad y'(0, t) = 0, \quad r = 0; \\ -J(L)y' - 3EIy''y'^2 + 3EIy''^2y' + EIy'' = 0, \quad r = L; \\ (EIy'' - 3EIy''y'^2)' = 0.$$

为了便于分析,采用 Galerkin 法对微分方程进行简化。则横向挠度近似为

$$y(r, t) \approx \sum_{i=1}^N q_i(t)\Psi_i(r), \quad (6)$$

其中 $q_i(t)$ 是假定的模态坐标, $\Psi_i(r)$ 是假定的模态函数, N 是保留的模态数量。叶片的振动响应的主要贡献是一阶模态,其一阶能量占比 > 92%。因此,本文取 $N = 1$ 保留一阶模态。

采用一阶模态函数,并通过 Galerkin 法离散运动方程。把式(6)代入式(5),两边乘以 $\Psi(r)$, 并沿叶片长度从 0 到 L 积分,得

$$a_1\ddot{q} + b_1\ddot{q}^2 + c_1\dot{q} + d_1\dot{q}^2 q \\ + (e_1 + e_2\cos(\Omega t))q + (f_1 + f_2\cos(\Omega t))q^3 \quad (7) \\ = g_1\sin(\Omega t) - \int_0^L \Psi(r)f(y, \dot{y}, s, \dot{s}, r, t)dr,$$

其中 $a_1, b_1, c_1, d_1, e_1, e_2, f_1, f_2, g_1, h_1$ 是常系数,详见增强出版:附录1。这些系数由分布函数 $m(r)$, $EI(r)$ 和假定的模态函数 $\Psi(r)$ 决定。

当叶片的质量和形状均匀时,将叶片近似为均匀的悬臂梁,即 $m(r)$ 和 $EI(r)$ 是常数。假定的模态函数使用欧拉-伯努利悬臂梁的第一模态函数 (Blevins et al., 1980):

$$\Psi(r) = \left(\cosh \frac{\beta r}{L} - \cos \frac{\beta r}{L} \right) - \sigma \left(\sinh \frac{\beta r}{L} + \sin \frac{\beta r}{L} \right),$$

其中 $\beta = 1.875 104 07$, $\sigma = 0.734 1$ 。由式(7)可知,线性项和三次非线性项都有参数激励,系统包含直接激励项。此外,风力涡轮叶片在面内运动是有阻

力的。因此,还需在系统中加入一阻尼项来模拟叶片在实际工作中的系统工作阻尼。

当模态函数确定时,系数只受叶片的材料属性、几何形状和叶片转速的影响。我们的目标是通过分析该叶片系统,求解出叶片的振动响应 $y(r, t)$ 。加入阻尼项后,方程(7)中有三次非线性项,有阻尼项,还有参数激励项和相同频率的直接激励项。因此,方程(7)具有 Mathieu-Duffing 方程的特征。Mathieu-Duffing 方程

$$\ddot{q} + \mu\dot{q} + (\varepsilon + \gamma\cos(\Omega t))q + \alpha q^3 = F\sin(\Omega t), \quad (8)$$

是本文接下来的研究重点。

2 时域最小残值法

2.1 非线性系统求解问题

本文采用时域最小残值法求解 Mathieu-Duffing 方程。相较谐波平衡(HB/IHB)等纯频域半解析方法, Liu et al. (2021a, 2021b, 2022)提出的时域最小残值法为时-频混合框架,无须繁琐的符号展开与小参数假设,直接在时域节点上迭代,既保留了时域物理直观,又具备高阶精度与良好并行性,对弱和强非线性均适用。时域小残值法的基本思想如下。

假设方程(8)的解能展开成无穷级数

$$q(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} [e_k \cos(k\omega t) + f_k \sin(k\omega t)], \quad (9)$$

其中 q 表示非线性系统中自由度的位移, a_0 是未知常数, e_k 和 f_k 是未知正余谐波系数。 ω 是与外激励力频率相关的频率。只要确定系数 $\mathbf{a} = [a_0, e_1, e_2, \dots, f_1, f_2, \dots]$, 并代入到方程(9)中,即可得到方程(8)的精确半解析解。在实际应用中,截取方程(9)的前 N 级作为方程(8)的近似解,即

$$q(t) \approx q^N(t) = a_0 + \sum_{k=1}^N [e_k \cos(k\omega t) + f_k \sin(k\omega t)]. \quad (10)$$

对方程(10)求导,可获得系统的速度与加速度的解析表达式

$$\begin{cases} \dot{q}(t) \approx \dot{q}^N(t) \\ \quad = \sum_{k=1}^N [-k\omega e_k \sin(k\omega t) + k\omega f_k \cos(k\omega t)], \\ \ddot{q}(t) \approx \ddot{q}^N(t) \\ \quad = \sum_{k=1}^N [-(k\omega)^2 e_k \cos(k\omega t) - (k\omega)^2 f_k \sin(k\omega t)]. \end{cases} \quad (11)$$

当级数取到无穷时,方程(8)在整个时域 $t \in [0, +\infty]$ 上恒等于零。但实际计算时,只能截取级数的前 N 级作为近似解。将方程(10)和(11)代入

方程(8),不能使方程(8)在整个时域 $t \in [0, +\infty]$ 上恒等于零。因此,把系统残差定义为

$\mathbf{R} = \ddot{q}^N + \mu\dot{q}^N + (\varepsilon + \gamma\cos(\Omega t))q^N + \alpha(q^N)^3 - F\sin(\Omega t)$, 然后找到适合的参数,让残差 \mathbf{R} 的值在一个周期内足够小。因此,非线性系统的求解问题转为最小值优化问题:

寻找一组合适的系数

$$\mathbf{a} = [a_0, e_1, e_2, \dots, e_N, f_1, f_2, \dots, f_N],$$

使残差 $R(\mathbf{a}, t)$ 在时域节点 $t \in [0, t_1, t_2, \dots, t_k]$ 内尽可能小,即

$$\begin{aligned} \mathbf{a}^* &= \operatorname{argmin}_{\mathbf{a} \in \mathcal{A}} \tilde{h}(\mathbf{a}, t) \\ &= \min_{\mathbf{a} \in \mathcal{A}} \int_0^{2\pi} R(\mathbf{a}, t)^T R(\mathbf{a}, t) dt, \end{aligned} \quad (12)$$

其中 $\tilde{h}(\mathbf{a}, t)$ 为非线性目标函数, \mathcal{A} 是 \mathbf{a} 的可行域。

2.2 增强的响应灵敏度法

方程(12)的最小值优化问题,可使用增强的响应灵敏度法进行迭代求解。初始给定一个合理的猜测初值 $\mathbf{a}^{(0)}$, 然后找到合适的更新量 $\delta\mathbf{a}$ 使目标函数 $\tilde{h}(\mathbf{a} + \delta\mathbf{a}, t)$ 减小,即

$$\mathbf{a}^{(j)} = \mathbf{a}^{(j-1)} + \delta\mathbf{a}^{(j)}, \quad j = 1, 2, \dots. \quad (13)$$

方程(13)不断更新所有系数进行迭代计算,直至找到合适的系数 \mathbf{a} , 满足所设的收敛条件。对于方程(12)目标函数 $\tilde{h}(\mathbf{a}, t)$ 的求解,一种常见方法是把目标函数在一个周期内离散的时间节点 $\{t_k \in [0, T] | k = 1, 2, \dots, l\}$ 上进行线性化处理,然后再求解线性化后的近似函数 $\hat{h}(\delta\mathbf{a}, \bar{\mathbf{a}})$,

$$\begin{cases} \min_{\mathbf{a} \in \mathcal{A}} \hat{h}(\bar{\mathbf{a}} + \delta\mathbf{a}, t) = \|\delta\mathbf{R}(\bar{\mathbf{a}}, t) - \mathbf{S}(\bar{\mathbf{a}}, t)\delta\mathbf{a}\|^2, \\ \delta\mathbf{R}(\bar{\mathbf{a}}, t) = \tilde{h}(\mathbf{a}, t) - \mathbf{R}(\bar{\mathbf{a}}, t), \end{cases} \quad (14)$$

其中 $\|\cdot\|$ 表示取 l^2 的范数,一阶响应灵敏度矩阵

$$\mathbf{S}(\bar{\mathbf{a}}, t) = \nabla_{\bar{\mathbf{a}}} \mathbf{R}(\bar{\mathbf{a}}, t) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \mathbf{R}(\bar{\mathbf{a}}, t_1)}{\partial a_1} & \frac{\partial \mathbf{R}(\bar{\mathbf{a}}, t_1)}{\partial a_2} & \dots & \frac{\partial \mathbf{R}(\bar{\mathbf{a}}, t_1)}{\partial a_m} \\ \frac{\partial \mathbf{R}(\bar{\mathbf{a}}, t_2)}{\partial a_1} & \frac{\partial \mathbf{R}(\bar{\mathbf{a}}, t_2)}{\partial a_2} & \dots & \frac{\partial \mathbf{R}(\bar{\mathbf{a}}, t_2)}{\partial a_m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \mathbf{R}(\bar{\mathbf{a}}, t_l)}{\partial a_1} & \frac{\partial \mathbf{R}(\bar{\mathbf{a}}, t_l)}{\partial a_2} & \dots & \frac{\partial \mathbf{R}(\bar{\mathbf{a}}, t_l)}{\partial a_m} \end{pmatrix}.$$

需要注意的是,过少的时间节点会引起频率泄露,或者是目标函数不适定等问题。本文中,在一个周期内选取 1 000 个等间距分布的时间节点。由于线性化后的近似目标函数 $\hat{h}(\bar{\mathbf{a}} + \delta\mathbf{a}, t)$ 有可能是病态的,所以使用 Tikhonov 正则化来解决病态问

题。使用了Tikhonov正则化后,问题转化为

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{a}_\lambda &= \arg \min_{\delta \mathbf{a} \in \mathcal{A} - \bar{\mathbf{a}}} \left\| \delta \mathbf{R}(\bar{\mathbf{a}}, t) - \mathbf{S}(\bar{\mathbf{a}}, t) \delta \mathbf{a} \right\|^2 + \lambda \left\| \delta \mathbf{a} \right\|^2 \\ &= \left[\mathbf{S}^T(\bar{\mathbf{a}}, t) \mathbf{S}(\bar{\mathbf{a}}, t) + \lambda \mathbf{I} \right]^{-1} \mathbf{S}^T(\bar{\mathbf{a}}, t) \delta \mathbf{R}(\bar{\mathbf{a}}, t), \end{aligned} \quad (15)$$

其中 λ 是正则化参数且 $\lambda \geq 0$ 。从方程(15)可以看出,不同的正则化参数对应着不同的更新量 $\delta \mathbf{a}_\lambda$ 。选取L-curve的最大曲率处对应的正则化参数。该点对应的正则化参数能较好平衡拟合残差 $\left\| \delta \mathbf{R}(\bar{\mathbf{a}}, t) - \mathbf{S}(\bar{\mathbf{a}}, t) \delta \mathbf{a} \right\|^2$ 和更新量 $\left\| \delta \mathbf{a} \right\|^2$ 。前述操作针对线性化的近似目标函数 $\hat{h}(\bar{\mathbf{a}} + \delta \mathbf{a}, t)$,适用于弱非线性系统。为了在强非线性系统中也可以进行上述操作,在迭代过程中引进置信域限制。引入一个“一致性指标”来衡量函数 $\hat{h}(\bar{\mathbf{a}} + \delta \mathbf{a}, t)$ 和 $h(\mathbf{a}, t)$ 接近程度。

$$\begin{aligned} \varpi(\delta \mathbf{a}, \bar{\mathbf{a}}) &= \frac{\hat{h}(\mathbf{a}) - \hat{h}(\bar{\mathbf{a}} + \delta \mathbf{a})}{\hat{h}(0, \bar{\mathbf{a}}) - \hat{h}(\delta \mathbf{a}, \bar{\mathbf{a}})} \\ &= \frac{\left\| \delta \mathbf{R}(\bar{\mathbf{a}}, t) \right\|^2 - \left\| \delta \mathbf{R}(\bar{\mathbf{a}} + \delta \mathbf{a}, t) \right\|^2}{\left\| \delta \mathbf{R}(\bar{\mathbf{a}}, t) \right\|^2 - \left\| \delta \mathbf{R}(\bar{\mathbf{a}}, t) - \mathbf{S}(\bar{\mathbf{a}}, t) \delta \mathbf{a} \right\|^2}, \end{aligned} \quad (16)$$

其中 $\hat{h}(\delta \mathbf{a}, \bar{\mathbf{a}})$ 为近似目标函数的最优解,则必然有 $\hat{h}(0, \bar{\mathbf{a}}) - \hat{h}(\delta \mathbf{a}, \bar{\mathbf{a}}) > 0$ 。迭代过程中保证 $\varpi(\delta \mathbf{a}, \bar{\mathbf{a}}) > 0$,就要保证 $h(\mathbf{a}) - h(\bar{\mathbf{a}} + \delta \mathbf{a}) > 0$,此时目标函数开始收敛。通常当一致性指标满足

$$\varpi(\delta \mathbf{a}, \bar{\mathbf{a}}) \geq \varpi_{cr} \in [0.25, 0.75], \quad (17)$$

函数 $\hat{h}(\bar{\mathbf{a}} + \delta \mathbf{a}, t)$ 与 $h(\mathbf{a}, t)$ 足够接近,且收敛速度较快。方程(17)构建的置信域约束在理论上保证了线性化后函数与原本非线性函数的近似一致性,同时说明:如果正则化参数 λ 足够大,那么一致性指标总是能够被满足的。所以存在临界的参数 λ_{cr} ,只要 $\lambda \geq \lambda_{cr}$,就能够满足一致性指标。

当 $\left\| \mathbf{S}^T(\bar{\mathbf{a}}) \delta \mathbf{R}(\bar{\mathbf{a}}) \right\| \neq 0$ 时,

$$\begin{cases} \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \varpi(\delta \mathbf{a}, \bar{\mathbf{a}}) = 1 > \varpi_{cr}, \\ \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \delta \mathbf{a}_\lambda = 0. \end{cases}$$

上述响应灵敏度法称为增强响应灵敏度法。

3 数值计算

参考Shen et al.(2008)对该方程的研究,选取 $\mu = 0.25$, $\varepsilon = 1$, $\alpha = 1$, $F = 0.1$, $\Omega = 2$, $\gamma = 3.8 \sim 12.2$ 。图2为位移 q 的极大值随着参数 γ 的变化。从图2可以看出, γ 对系统的动态响应有着非常显著的影响。系统既有周期性运动,也有混沌运动。随着 γ 的增加,图2显示系统出现以下的分岔现象:单周期

运动—多周期运动—单周期运动—多周期运动—混沌运动。

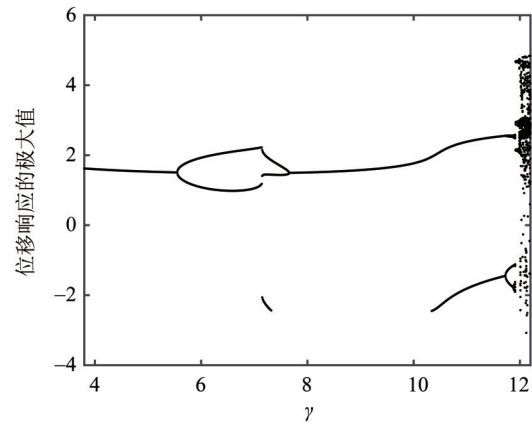


图2 $\gamma = 3.8 \sim 12.2$ 的分岔图

Fig. 2 Bifurcation diagram for $\gamma = 3.8 \sim 12.2$

图2显示 $\gamma = 4.2$ 系统发生单周期的运动。图3中参数 $\gamma = 4.2$,其他参数与图2相同。时域最小残值法截断级数 $N = 50$ 。图3(a)构建了系统相空间的动力学特征对比。其中,横纵坐标分别为广义位移 $q(t)$ 和广义速度 $\dot{q}(t)$,蓝色散点由四阶龙格-库塔法(RK)数值积分生成,红色连续曲线则源自时域最小残值法(TMRM)的半解析解。从图3(a)看出,时域最小残值法与龙格-库塔法的结果完全吻合。这说明时域最小残值法计算精度非常高。当 $\gamma = 4.2$ 时,图3(a)显示系统的相空间轨迹为一个闭合的极限环。图3(b)中横纵坐标分别为频率和对数形式的功率谱密度(PSD),图中第一个明显的尖峰出现在系统的固有频率处,后面的尖峰出现位置均为固有频率的整数倍数处,这意味着系统的响应频率与外激励的频率相同,即 $\omega = \Omega$ 。图3(c)和3(d)显示,此时系统的庞加莱截面上只有一个点。综上所述, $\gamma = 4.2$ 时系统发生了单周期运动,与图2的结果吻合。

图2显示 $\gamma = 5.55$ 系统发生倍周期分岔,系统进行周期-2运动。时域最小残值法截断级数 $N = 50$ 。当 $\gamma = 5.55$ 时,图4(a)显示系统的相空间轨迹为两个交替闭合的环路。图4(b)中第一尖峰出现在系统固有频率的一半处,后面的尖峰出现位置均为固有频率的1/2倍数处,这意味着系统的响应频率是外激励的频率一半,即 $\omega = \Omega/2$ 。图4(c)和4(d)显示,此时系统的庞加莱截面有两个点。综上所述, $\gamma = 5.55$ 时系统发生周期-2运动,与图2的结果吻合。

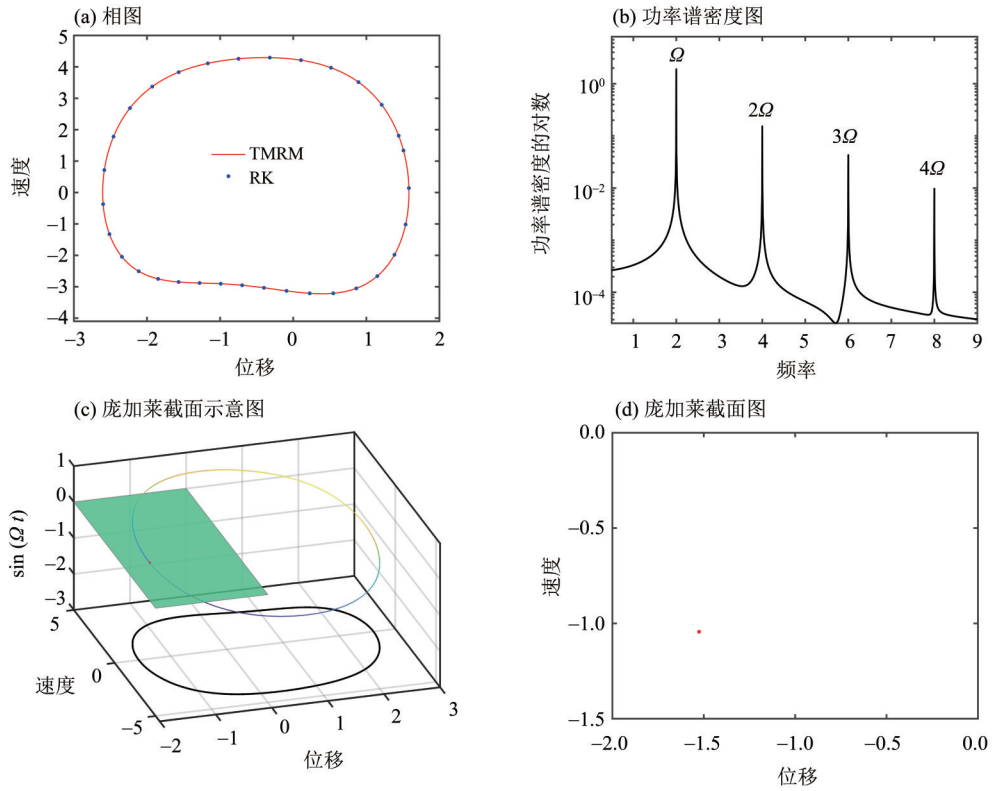


图3 $\gamma = 4.2$ 时系统的动力学行为

Fig. 3 Dynamical behavior of the system at $\gamma = 4.2$

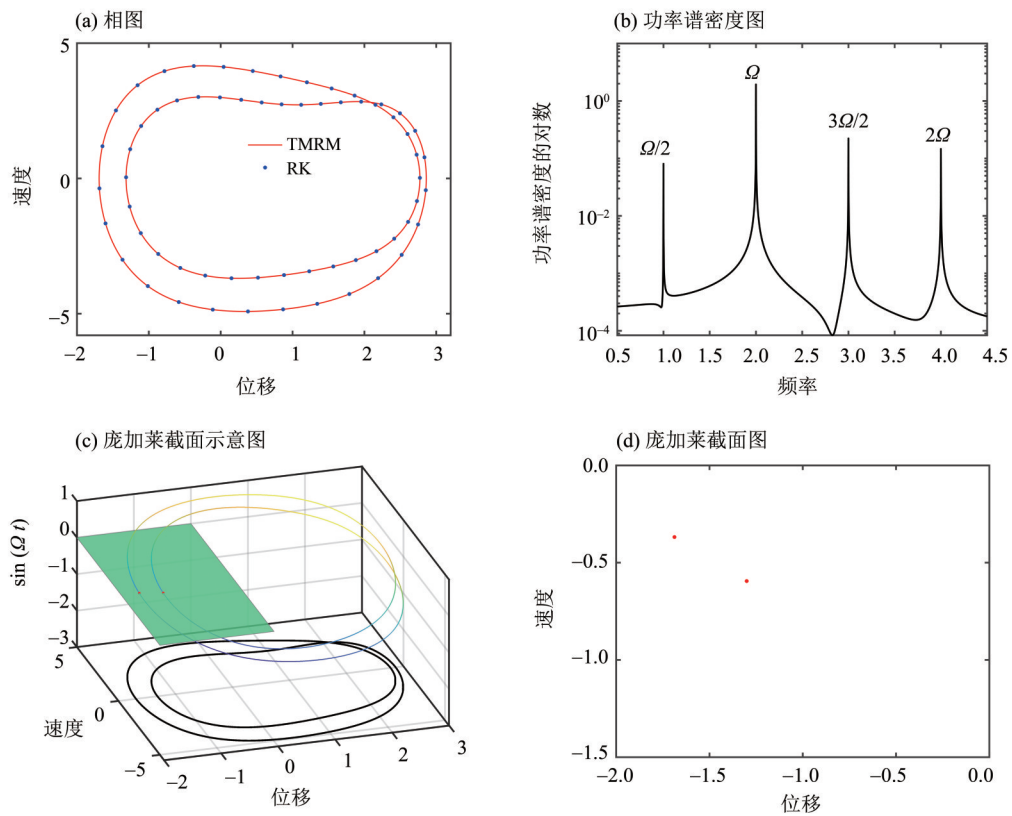


图4 $\gamma = 5.55$ 时系统的动力学行为

Fig. 4 Dynamical behavior of the system at $\gamma = 5.55$

当 $\gamma = 12$ 时, 图 5(a) 显示系统轨迹在相空间中无限缠绕, 永不闭合或重复。图 5(b) 功率谱密度曲线表现为连续宽带的噪声基底, 能量分布在较宽的频率范围内, 而非集中于离散频率点。图 6(c)

和 6(d) 显示, 此时系统的庞加莱截面出现许多点, 且这些点的分布呈现复杂的分形图案。综上所述, $\gamma = 12$ 时系统发生混沌运动, 与图 2 的结果吻合。

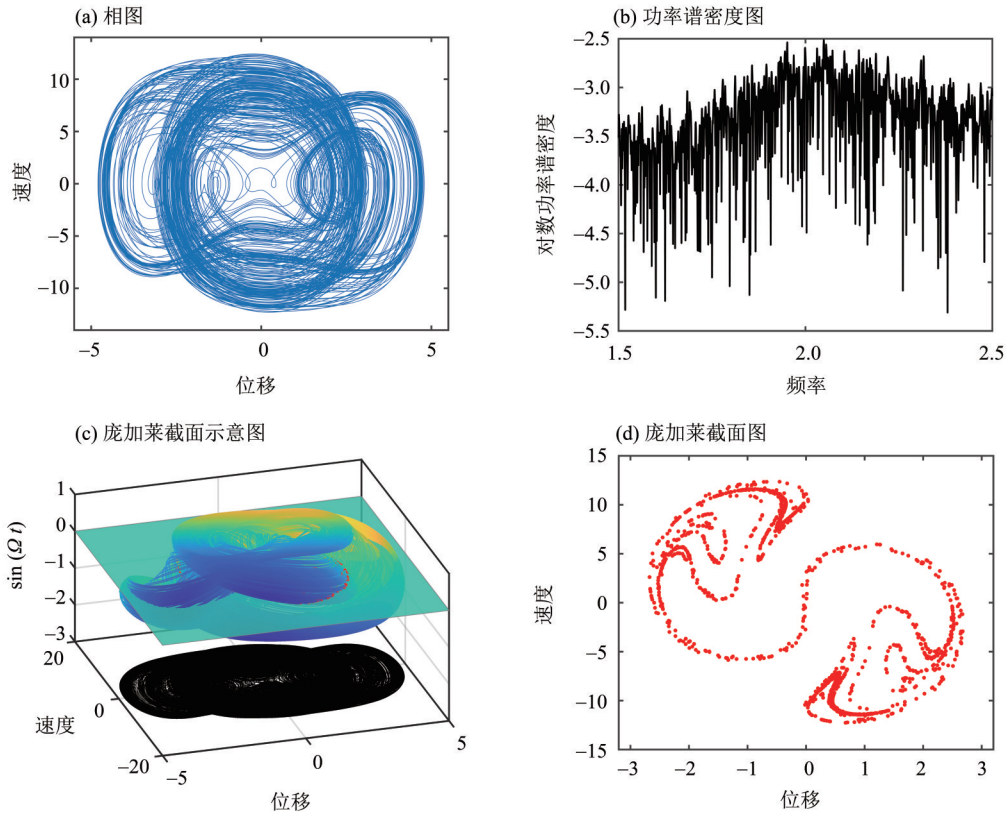


图 5 $\gamma = 12$ 时系统的动力学行为
Fig. 5 Dynamical behavior of the system at $\gamma = 12$

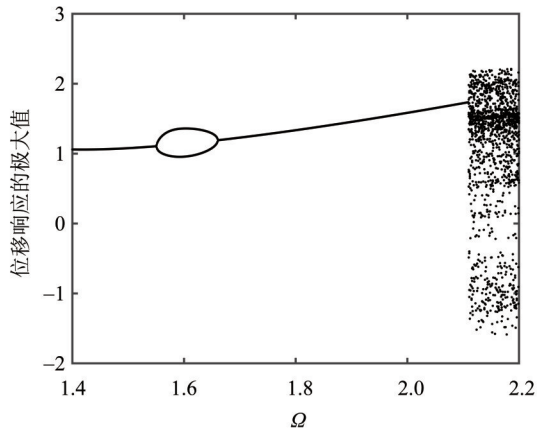
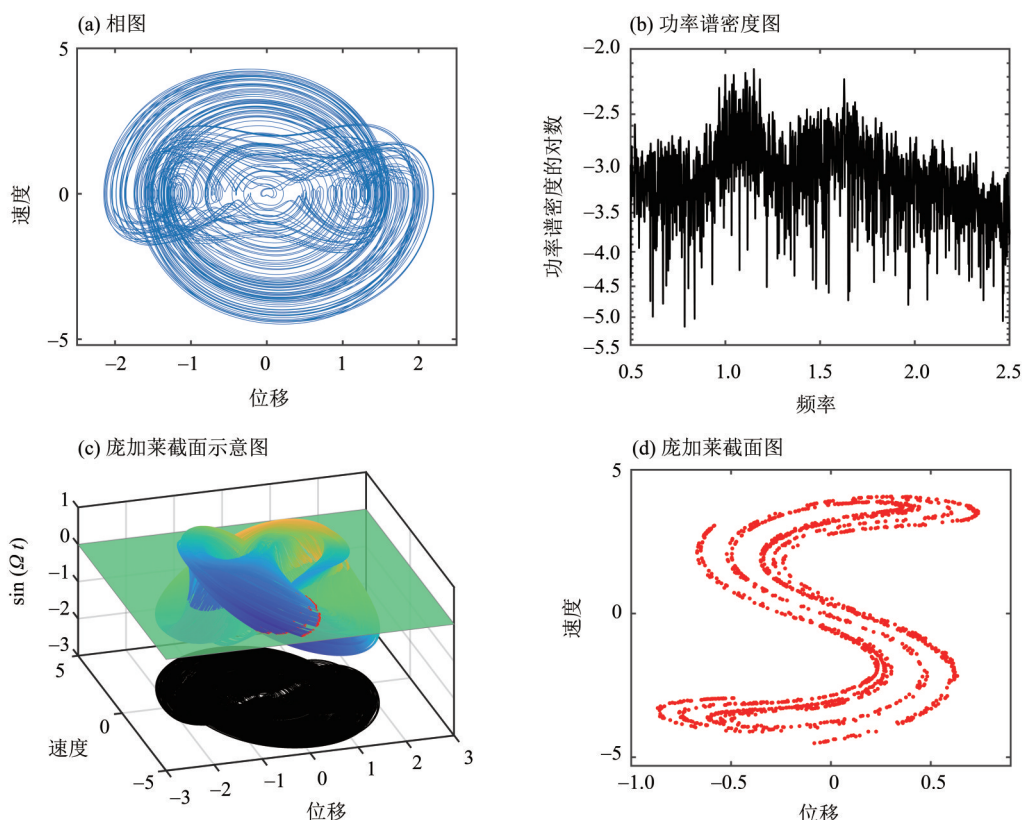


图 6 $\Omega = 1.4 \sim 2.2$ 的分岔图
Fig. 6 Bifurcation diagram for $\Omega = 1.4 \sim 2.2$

风力涡轮机叶片在现实使用过程中, 受到的气动荷载是变化的。不同的气动荷载引起的叶片转速会有所不同。所以, 研究 Ω 的变化对系统非线性行为的影响非常必要。选取 $\mu = 0.25, \varepsilon = 1, \alpha = 1,$

$F = 0.1, \gamma = 4.2, \Omega = 1.4 \sim 2.2$ 。图 6 给出了位移 q 的极大值随着参数 Ω 的变化。从图 6 可以看出, 随着参数 Ω 的变化, 系统同样既有周期性运动, 也有混沌运动。随着转速 Ω 的增加, 系统出现以下的分岔现象: 单周期运动—多周期运动—单周期运动—混沌运动。

当 $\Omega = 2.15$, 系统发生混沌运动, 如图 6 所示。图 7 选取 $\Omega = 2.15$, 其他参数与图 6 的相同。当 $\Omega = 2.15$ 时, 图 7(a) 显示系统轨迹在相空间中无限缠绕, 永不闭合或重复。图 7(b) 的功率谱密度表现为连续宽带的噪声基底, 能量分布在较宽的频率范围内, 而非集中于离散频率点。图 7(c) 和 7(d) 显示, 此时系统的庞加莱截面出现许多点, 且这些点的分布呈现复杂的分形图案。综上所述, $\Omega = 2.15$ 时系统发生混沌运动, 与图 6 的结果吻合。

图7 $\Omega = 2.15$ 时系统的动力学行为Fig. 7 Dynamical behavior of the system at $\Omega = 2.15$

4 结论

本文建立了水平轴风力涡轮机叶片的平面内旋转弯曲动力学模型。理论推导表明:重力荷载产生了参数激励和直接激励;而气动荷载也可能诱发附加参数激励项。基于Hamilton原理,本文建立了包含几何非线性的风力机叶片系统的高阶偏微分控制方程。通过选取悬臂梁的一阶模态作为模态函数,结合恒定转速假设,将叶片系统的高阶偏微分控制方程转化为单自由度非线性常微分方程。简化的过程中,系统同时保留了参数激励与直接激励项,其本构方程形式呈现典型的Mathieu-Duffing方程特征,即包含线性刚度项、立方非线性项、阻尼项、参数激励项以及相同频率的直接激励项。

参考文献:

- 高雪莲, 王宪杰, 雷春雨, 等, 2024. 风力发电机叶片MRD模糊LQR减振控制研究[J]. 噪声与振动控制, 44(5): 44-49.
- 黄建亮, 王腾, 陈树辉, 2021. 含外激励van der Pol-Mathieu方程的非线性动力学特性分析[J]. 力学学报, 53(2): 496-510.

针对该强非线性系统的求解,本文采用时域最小残值法进行分析。通过构建分岔图、相轨迹、功率谱及庞加莱映射等多维度数值诊断,系统揭示了系统响应的演化规律:当参数激励幅值 γ 作为控制参数时,系统经历“单周期→多周期→单周期→多周期→混沌”的倍周期分岔路径;以转速 Ω 为变量时,则呈现“单周期→多周期→单周期→混沌”的转迁规律。这种复杂的非线性行为能为解释实际风机叶片运行中观测到的间歇性振动现象提供理论依据。因此,本文建立的Mathieu-Duffing范式为后续研究提供了可扩展的理论框架,其揭示的分岔机制对兆瓦级风力机的颤振预警和传动系统动态设计具有重要指导价值。

- 郎启发, 2024. 风力发电机叶片动力学建模及振动特性研究[D]. 兰州: 兰州理工大学.
- 穆永祥, 2023. 基于分段半解析法的大型风力机叶片振动特性研究[D]. 太原: 太原科技大学.
- 牛江川, 张文静, 申永军, 等, 2019. 分数阶Mathieu-Duffing振子的亚谐共振[C]//中国力学大会. 杭州,

- 中国.
- 王德亮,刘济科,刘广,2023.基于Tikhonov正则化改进的IHB法求解Mathieu-Duffing系统多重解[J].中山大学学报(自然科学版中英文),62(5):78-84.
- 解加全,王海军,师玮,等,2024.含平方阻尼项的Mathieu-Duffing系统混沌与分岔研究[J].振动与冲击,43(7):168-174.
- 张又又,戎海武,2012.谐和与随机噪声联合参数激励下Mathieu系统的矩稳定性[J].中山大学学报(自然科学版),51(6):25-29.
- 周楠,刘惠康,柴琳,等,2024.风力发电机叶片面内振动抑制的主动控制[J].噪声与振动控制,44(5):8-13+113.
- ACAR G D, FEENY B F, 2018. Bend-bend-twist vibrations of a wind turbine blade[J]. Wind Energy, 21(1):15-28.
- BAGHERPOUR T, LI X M, MANOLAS D I, et al, 2018. Modeling of material bend-twist coupling on wind turbine blades[J]. Compos Struct, 193: 237-246.
- BLEVINS R D, PLUNKETT R, 1980. Formulas for natural frequency and mode shape [J]. J Appl Mech, 47(2): 461-462.
- LIU G, LIU J K, WANG L, et al, 2021a. A new semi-analytical approach for quasi-periodic vibrations of nonlinear systems [J]. Commun Nonlinear Sci, 103: 105999.
- LIU G, LIU J K, WANG L, et al, 2022. Time-domain minimum residual method combined with energy balance for nonlinear conservative systems [J]. Mech Syst Signal Pr, 170: 108818.
- LIU G, LU Z R, WANG L, et al, 2021b. A new semi-analytical technique for nonlinear systems based on response sensitivity analysis [J]. Nonlinear Dyn, 103(2): 1529-1551.
- MAKTOUF R, YANGUI M, FAKHFEKH T, et al, 2019. Non-linear dynamic analysis of a wind turbine blade [J]. J Chin Inst Eng, 42(8): 727-737.
- NG L, RAND R, 2002. Bifurcations in a mathieu equation with cubic nonlinearities [J]. Chaos Soliton Fract, 14(2): 173-181.
- RAMAKRISHNAN V, FEENY B, 2023. Responses of a strongly forced mathieu equation-part 1: Cyclic loading [J]. J Vibr Acoust, 145: 1-25.
- SALAH D A H, E-RNOSIERM A, HAMED A M, 2024. Investigation of the performance of a horizontal-axis dual rotor wind turbine [J]. Sci Rep, 14(1): 6208.
- SHEN J H, LIN K C, CHEN S H, et al, 2008. Bifurcation and route-to-chaos analyses for Mathieu-Duffing oscillator by the incremental harmonic balance method [J]. Nonlinear Dyn, 52: 403-414.

(责任编辑 王海蓉)