

金属在多频交变磁场中的受力*

吴嘉淇¹, 段奥成², 王晴岚², 徐家豪³, 刘祺¹

1. 天琴计划教育部重点实验室 / 天琴前沿科学中心 / 国家航天局引力波研究中心 / 中山大学天琴中心, 广东 珠海 519082
2. 量子信息与精密光学十堰市重点实验室 / 湖北汽车工业学院光电工程学院, 湖北 十堰 442000
3. 衢州职业技术学院信息工程学院, 浙江 衢州 324000

摘要: 在交变磁场中, 金属内部会产生涡旋电流, 该涡流与交变磁场耦合会在金属上产生磁感应力。当磁场频率较为单一时, 涡流与磁耦合产生的磁力易于分析和计算; 但当磁场存在多个频率的分量时, 金属受到的磁力将会变得复杂。以理论分析与仿真计算相结合的方法, 本文探究了双频磁场下涡流与磁场耦合产生的磁力组成, 发现在该情况下金属上受到的磁力将会存在下转换效应, 该效应对引力波探测等精密测量任务具有重要意义。

关键词: 磁感应力; 交变磁场; 涡流; 下转换效应; 交流磁化率

中图分类号: O44 文献标志码: A 文章编号: 2097-0137(2025)06-0062-05

The magnetic force on metal under the multi-frequency AC magnetic field

WU Jiaqi¹, DUAN Aocheng², WANG Qinglan², XU Jiahao³, LIU Qi¹

1. MOE Key Laboratory of TianQin Mission / Frontiers Science Center for TianQin / Gravitational Waves Research Center of CNSA / TianQin Research Center for Gravitational Physics, Sun Yat-sen University, Zhuhai 519082, China
2. Shiyan Key Laboratory of Quantum Information and Precision Optics / School of Optoelectronic Engineering, Hubei University of Automotive Technology, Shiyan 442000, China
3. Faculty of Information Engineer, Quzhou College of Technology, Quzhou 324000, China

Abstract: In AC magnetic field, eddy current is generated in the metal. Due to the coupling of eddy currents and the AC magnetic field, the magnetic induced force is produced on the metal, which is significant in specific research fields such as gravitational wave detection. When the magnetic field frequency is single, the magnetic force generated is easy to analyze and calculate. However, when the magnetic field contains multiple frequency components, the magnetic force acting on the metal becomes complex. In this study, we investigate the composition of magnetic forces induced by eddy current under dual-frequency magnetic field through combination of theoretical analysis and simulation calculations and reveal the down-converting effect of the magnetic forces, which is critical for precision measurement tasks. Finally, we propose that employing AC magnetic susceptibility to calculate magnetic force can significantly reduce computation time while maintaining analytical accuracy, thereby establishing a rapid and reliable method for subsequent research on metal magnetic force.

Key words: magnetic force; AC magnetic field; eddy current; down-converting effect; AC magnetic susceptibility

* 收稿日期: 2025-05-29

录用日期: 2025-07-05

网络首发日期: 2025-09-30

基金项目: 国家自然科学基金(12075325)

作者简介: 吴嘉淇(2000年生), 男; 研究方向: 精密测量物理; E-mail: wujq37@mail2.sysu.edu.cn

通信作者: 刘祺(1981年生), 男; 研究方向: 精密测量物理; E-mail: liuq239@mail.sysu.edu.cn

全文阅读



ZR20250095

在交变磁场中,金属内部会产生涡旋电流。该现象产生的热效应被广泛研究与应用。在工业层面,高频感应加热技术已成熟应用于金属热处理及表面镀膜技术(张雪彪等,2012;邸英浩等,2004);在民用电器中,电磁炉则是涡流热效应实际应用的代表(周艳琼等,2001)。

然而在部分行业中,涡流与交变磁场耦合产生的磁感应力也会造成不可忽视的影响。在引力波探测计划,如天琴计划(周艳琼等,2001;罗俊等,2021)、LISA (laser interferometer space antenna) (McNamara et al., 2008)、太极计划(Ruan et al., 2020)中,由于空间中的多频交变磁场,卫星上搭载的检验质量内部将会产生涡流(Wu et al., 2025),其产生的磁力将会对各个卫星检验质量之间的相对位移造成影响,从而影响探测结果(Luo et al., 2016)。因此,对金属在多频交变磁场中的受力进行研究是必要的。

金属在交变磁场中受力的原理为交变磁场中的金属内部产生涡旋电流,涡旋电流与金属内部的总磁场耦合从而产生磁力。根据经典电磁学理论,金属在交变磁场中的受力为

$$F(t) = \iiint \mathbf{J}(t) \times \mathbf{B}(t) dV, \quad (1)$$

其中 $\mathbf{J}(t)$ 为交变磁场产生的涡流, $\mathbf{B}(t)$ 为金属内部的总磁场,即外部磁场加上感应磁场。若该磁场为单个频率的交变磁场,对金属受力的分析比较简单;但是当磁场存在多个频率的磁场分量时,金属上将会存在多个频率的涡流与多个频率的磁场分别进行耦合的情况,从而产生多个频率的磁力。本研究的目的为分析多频交变磁场下的涡流与磁场的耦合过程,明确金属所受到磁力的频率组成。

因此,从金属在交变磁场中受力的理论分析出发,本文对金属内部的涡流与磁场的耦合过程进行了分析;然后,通过对金属球与对金属立方体的仿真,对理论分析进行了验证。

1 磁场频率对磁力频率的影响

1.1 单频磁场中的金属受力

当外加磁场仅存在一个频率的交流磁场叠加直流(DC)磁场时,其形式可以表示为

$$\mathbf{B}(x, t) = \mathbf{B}^{\text{DC}}(x) + \mathbf{B}_{\omega}^{\text{AC}}(x, t),$$

其中 $\mathbf{B}^{\text{DC}}(x)$ 为DC磁场, $\mathbf{B}_{\omega}^{\text{AC}}(x, t)$ 为频率为 ω 的交流磁场,其表示为

$$\mathbf{B}_{\omega}^{\text{AC}}(x, t) = \mathbf{B}_{\omega}^{\text{AC}}(x) \sin \omega t. \quad (2)$$

在该磁场中金属内部会产生感应磁场,与外加磁场进行叠加,但由于感应磁场和外加磁场的频率一致,产生的总磁场的频率与外加磁场一致,因此并不会影响我们对于金属上产生磁力所含有的频率的分析。所以,以下的分析我们将忽略感应磁场的部分。

由交变磁场激发的涡流与磁场具有相同的频率,但会存在一定的相位差(Wu et al., 2025)。因此,涡流可以表示为

$$\mathbf{J}(t) = \mathbf{J} \sin(\omega t - \varphi), \quad (3)$$

其中

$$\mathbf{J} = \nabla \times \frac{\mathbf{B}_{\omega}^{\text{AC}}(x)}{\mu_0}.$$

将式(2)和(3)代入式(1),对磁力进行计算。在磁场和涡流的耦合下,所得到的磁力会存在两个频率 $\omega, 2\omega$ 以及直流项,具体的耦合过程如图1所示。

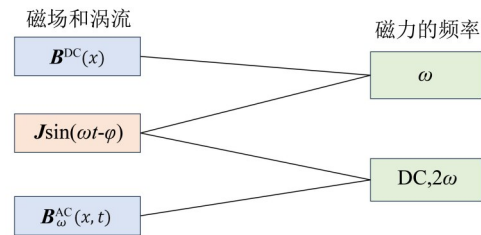


图1 单频交流磁场下的耦合过程

Fig. 1 The coupling process in single-frequency AC magnetic field

由该结果可以看出,当外加磁场为单频率交变磁场与直流场耦合时,金属在该磁场中将会受到两个频率(ω 与 2ω)的交变磁力和一项直流磁力。

1.2 多频磁场中的金属受力

在金属所处的真实环境中,磁场通常为多频耦合交变磁场。此处我们考虑双频率磁场耦合的情况,即当外加磁场存在两个频率时,其形式为

$$\mathbf{B}(x, t) = \mathbf{B}^{\text{DC}}(x) + \mathbf{B}_{\omega_1}^{\text{AC}}(x, t) + \mathbf{B}_{\omega_2}^{\text{AC}}(x, t), \quad (4)$$

其中

$$\mathbf{B}_{\omega_1}^{\text{AC}}(x, t) = \mathbf{B}_{\omega_1}^{\text{AC}}(x) \sin \omega_1 t,$$

$$\mathbf{B}_{\omega_2}^{\text{AC}}(x, t) = \mathbf{B}_{\omega_2}^{\text{AC}}(x) \sin \omega_2 t.$$

磁场激发产生的涡流为

$$\mathbf{J}(t) = \mathbf{J}_1 \sin(\omega_1 t - \varphi) + \mathbf{J}_2 \sin(\omega_2 t - \varphi), \quad (5)$$

其中 $\mathbf{J}_1 \sin(\omega_1 t - \varphi)$ 由 $\mathbf{B}_{\omega_1}^{\text{AC}}(x, t)$ 激发产生, $\mathbf{J}_2 \sin(\omega_2 t - \varphi)$ 由 $\mathbf{B}_{\omega_2}^{\text{AC}}(x, t)$ 激发产生。

将式(4)和(5)代入式(1),对磁力进行计算。在磁场和涡流的耦合下,所得到的磁力存在六个频

率($\omega_1, \omega_2, 2\omega_1, 2\omega_2, \omega_1 + \omega_2, \omega_1 - \omega_2$)和直流项,具体的耦合过程如图2所示。

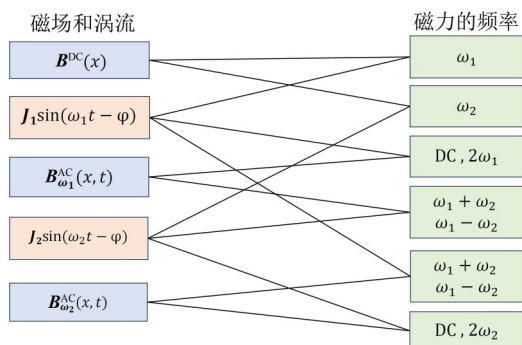


图2 双频交流磁场下的耦合过程

Fig. 2 The coupling process in a dual-frequency AC magnetic field

根据耦合结果,我们发现耦合后的磁力频率中含有 $\omega_1 - \omega_2$,该分量表明金属在交变磁场中的受力存在下转换效应。该效应对于引力波探测工作中对检验质量残余加速度噪声的评估极为重要。该效应意味着,若环境磁场中存在频率处于极高频段但十分相近的两个磁场分量,这两个磁场分量也会耦合出引力波探测频段内(以天琴计划为例,探测频段为1 mHz到1 Hz)(Luo et al., 2016)的扰动,从而对引力波探测造成影响。

2 金属在交变磁场中的受力仿真

本节对金属球和金属立方体在交变磁场中的受力进行仿真计算,并对计算结果进行FFT,以探究金属所受磁力的频率组成。

2.1 对交变磁场中金属球的仿真

仿真所采用的金属球是直径为2 cm的铜球,考虑环境磁场存在两个频率,对该铜球施加外加磁场

$$\mathbf{B}_{\text{applied}} = \hat{z} [\mathbf{B}_0 + \nabla B(z + 0.025)] \cdot (\sin\omega_1 t + \sin\omega_2 t) + \mathbf{B}_0 \hat{z}, \quad (6)$$

其中 $\omega_1 = 100$ Hz, $\omega_2 = 110$ Hz, $B_0 = 5$ T, $\nabla B = 5$ T/m, \hat{z} 为 z 方向的单位向量。利用COMSOL对铜球与磁场进行建模后,对铜球受力进行仿真计算,其仿真计算结果如图3所示。

对金属铜球进行FFT,所得结果具有6组峰,分别位于10、100、110、200、210、220 Hz。该结果与前一节对磁力进行的理论分析一致,其中频率为10 Hz的磁力为下转换效应导致的磁力。

2.2 对交变磁场中金属立方的仿真

由于金属球的仿真消耗时间过长,我们在误差

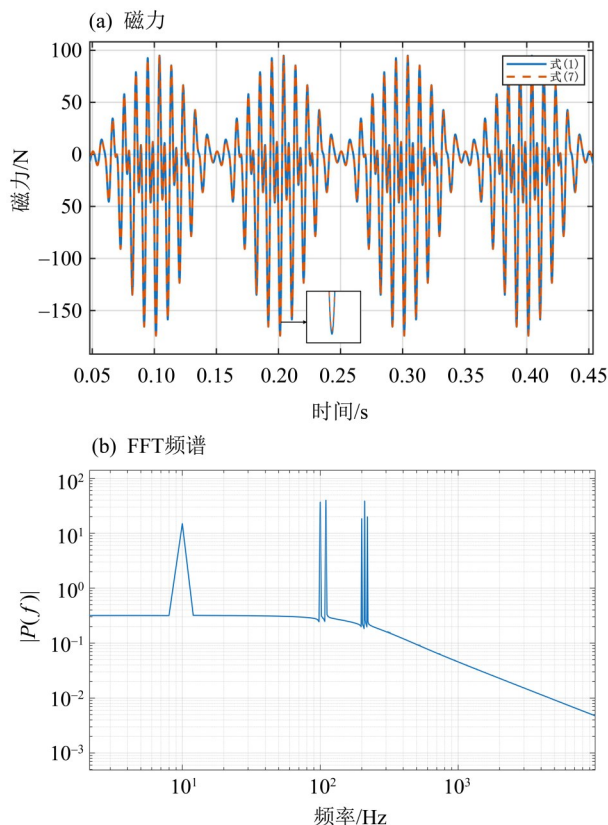


图3 铜球上的磁力及其FFT后的结果

Fig. 3 The magnetic force acting on the copper sphere and FFT result of the magnetic force

允许的范围内,适当调节了网格划分的精细程度,使得其运算速度提高。我们选择边长为5 cm的铂金立方体进行仿真,同样考虑环境磁场存在两个频率,对该立方体施加外加结构如式(6)的磁场 $\mathbf{B}_{\text{applied}}$,其中 $\omega_1 = 100$ Hz, $\omega_2 = 110$ Hz,同时为了验证在较大的磁场和磁场梯度下,我们对于磁力的分析是否会出现问题,因此在此处设置 $B_0 = 5000$ T, $\nabla B = 5000$ T/m。利用COMSOL对其进行建模后,所得的仿真结果以及FFT后结果如图4所示。

根据FFT后的结果,可知FFT频谱图有6组峰,峰值所处频率为10、100、110、200、210、220 Hz。该结果符合前一节对磁力进行的理论分析,其中频率为10 Hz的磁力为下转换效应导致的磁力。

3 利用交流磁化率计算磁力

前一节的仿真结果验证了我们对于磁力频率组成的理论分析。但是,由于式(1)对于磁力的计算与仿真需要基于时域上每一时刻金属内部的总磁场与涡流大小,并且为了保证仿真精度以及体现出磁力所有的频率组成,仿真的时间步长与总时间长度具有一定要求。因此,该求解过程需要较大的

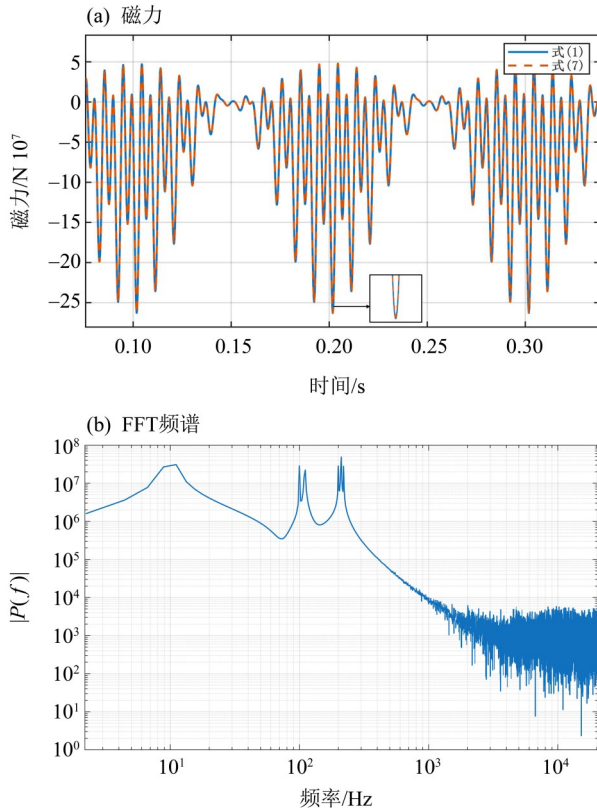


图4 铂金立方体上的磁力及其FFT后的结果

Fig. 4 The magnetic force acting on Au-Pt cube and FFT result of the magnetic force

计算量。以前一节的仿真为例,对于直径2 cm的金属球,采用的时间步长为 10^{-5} s,总时间长度为0.5 s,仿真所使用的设备为配备24核 Intel i9-13980 HX处理器和 NVIDIA RTX4070 显卡的计算机,所花费的总时长为153 h;对于铂金立方体的仿真,在误差允许的范围内,我们适当调节了网格划分的精细程度,但仍然花费了19 h。并且上面的仿真结果仅仅只能体现一组磁场频率的结果($\omega_1 = 100$ Hz, $\omega_2 = 110$ Hz),因此利用式(1)探究金属在交变磁场的受力具有一定局限性。为了缩短计算时长,并得到更多频率下的计算结果,我们提出利用交流磁化率计算金属在交变磁场下的受力。

3.1 交流磁化率计算磁力的原理与优势

我们将金属看作一个磁偶极子,其磁矩 \mathbf{m} 是由 ω 频率下的交变磁场激发产生的,此时检验质量所受到的磁力(Armano et al., 2020)可以表示为

$$F(t) = \iiint \mathbf{m}_v(t) \cdot \nabla \mathbf{B}(t) dV = \frac{1}{\mu} \iiint \chi_e \mathbf{B}(t) \cdot \nabla \mathbf{B}(t) dV, \quad (7)$$

其中 $\mathbf{B}(t)$ 为环境磁场, $\nabla \mathbf{B}(t)$ 为环境磁场的梯度, χ_e 为检验质量在频率 ω 下的交流磁化率,体积平均磁矩 $\mathbf{m}_v(t)$ 来源于检验质量内部的涡流。 $\mathbf{m}_v(t)$ 与 χ_e

可以表示为

$$\mathbf{m}_v(t) = \frac{1}{2V} \iiint \mathbf{r} \times \mathbf{J}(t) dV,$$

$$\chi_e = \frac{\mu \mathbf{m}_v(t)}{\mathbf{B}(t)}.$$

由于体积平均磁矩和磁场之间存在一定的相位差,因此交流磁化率通常用复数表示为

$$\chi_e = \chi_r + i \chi_i,$$

其中 χ_i 表示磁矩与磁场之间的相位差。

利用交流磁化率计算磁力为我们的研究提供了极大的帮助。首先,交流磁化率作为研究金属对象的性质,我们不仅可以通过计算与仿真获得,还可以通过实验对其进行测定,这就意味着当研究对象并不具有良好的几何对称性时,我们仍可以使用该方法对其受力进行研究;其次,该方法简化了计算所需的条件,只需要知道周围磁场的大小与梯度,即可利用该方法得到金属受力,而不需要通过繁琐的计算求解金属内部磁场;最后,该方法简化了计算过程,在研究对象的交流磁化率已知的前提下,我们可以直接计算,而不必再利用软件进行仿真。

3.2 交流磁化率计算磁力的验证

为了验证利用交流磁化率计算磁力的可行性,我们先采用该方法计算第2节中直径为2 cm的铜球在所处磁场环境下的受力。

根据朗道在《连续媒介电动力学》中所提供的球的交流磁化率的求解(Landaul et al., 1982),可以得到铜球在所有频率下的交流磁化率,结果如图5所示。

从图5的结果中,提取出 $\omega_1 = 100$ Hz和 $\omega_2 = 110$ Hz处的交流磁化率 χ_{ω_1} 和 χ_{ω_2} ,并代入式(7)得

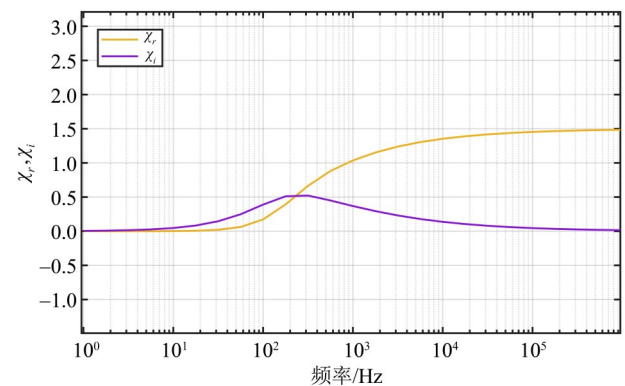


图5 2 cm铜球的交流磁化率

Fig. 5 The AC magnetic susceptibility of a copper sphere with a diameter of 2 cm

$$F(t) = \iiint m_{\text{Vtotal}}(t) \cdot \nabla B_{\text{total}}(t) dV,$$

$$m_{\text{Vtotal}}(t) = \chi_{\omega_1} B_{\omega_1}^{\text{AC}}(x, t) + \chi_{\omega_2} B_{\omega_2}^{\text{AC}}(x, t),$$

$$\nabla B_{\text{total}}(t) = \nabla B_{\omega_1}^{\text{AC}}(t) + \nabla B_{\omega_2}^{\text{AC}}(t) + \nabla B_{\omega_2}^{\text{DC}},$$

其中 $B_{\omega_1}^{\text{AC}}(x, t)$ 和 $B_{\omega_2}^{\text{AC}}(x, t)$ 分别为 100 和 110 Hz 频率的磁场分量; $\nabla B_{\omega_1}^{\text{AC}}(t)$ 、 $\nabla B_{\omega_2}^{\text{AC}}(t)$ 、 $\nabla B_{\omega_2}^{\text{DC}}$ 分别为 100 Hz 磁场、110 Hz 磁场以及 DC 磁场的磁场梯度, 计算结果如图 3 所示。该对比结果表明了利用交流磁化率计算磁力的准确性, 为了进一步验证其可用性, 我们还计算了第 2 节中边长为 5 cm 的铂金立方体在所处磁场环境下的受力。

由于立方体的几何对称性不如球, 金属立方体的交流磁化率的解析解难以直接计算求得, 因此我们选择通过有限元仿真对边长为 5 cm 的铂金立方体的交流磁化率进行求解, 仿真计算结果如图 6 所示。

得到铂金立方体的交流磁化率后, 用和球同样的计算方法对铂金立方体的受力进行计算, 结果如图 4 所示。对比发现, 其峰值处的相对误差为 1.9%, 这进一步说明利用交流磁化率计算磁力的方法来分析金属在交变磁场中的受力是准确合理的。

利用交流磁化率计算磁力的方法能在 1 h 内完成铜球和铂金立方体的受力计算, 大大节省了对金属受力进行分析的时间成本。

参考文献:

- 邸英浩, 曹晓明, 2004. 真空镀膜技术的现状及进展[J]. 天津冶金, (5): 45-48+54.
- 罗俊, 艾凌皓, 艾艳丽, 等, 2021. 天琴计划简介[J]. 中山大学学报(自然科学版), 60(1/2): 1-19.
- 张雪彪, 杨玉龙, 刘玉君, 2012. 钢板高频感应加热过程电磁-热耦合场分析[J]. 大连理工大学学报, 52(5): 676-682.
- 周艳琼, 白杉, 2001. 电磁炉工作原理[J]. 家电维修技术, (6): 35-36.
- ARMANO M, AUDLEY H, BAIRD J, et al, 2020. Spacecraft and interplanetary contributions to the magnetic environment on-board LISA Pathfinder[J]. Mon Not R Astron Soc, 494(2): 3014-3027.
- LANDAUL D, PITAEVSKIIL P, LIFSHITZE M, 1982.

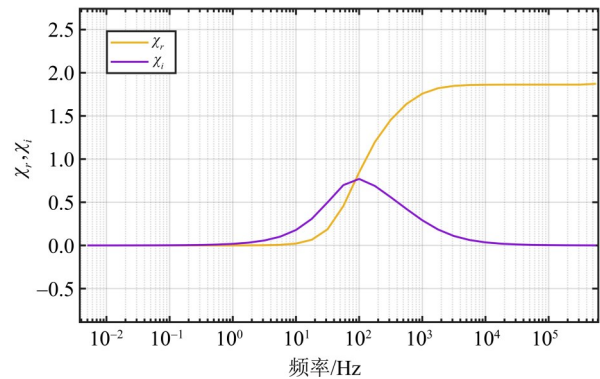


图 6 5 cm 铂金立方体的交流磁化率

Fig. 6 The AC magnetic susceptibility of a Au-Pt cube with a side length of 5 cm

4 总结

以分析金属在多频交变磁场中的受力为目的, 通过理论分析和仿真计算相结合的方法, 得到了金属在双频交变磁场中所受磁力的频率组成, 发现在双频交变磁场下金属所受磁力会出现下转换效应, 该效应对引力波探测等精密测量相关行业具有研究意义。

在本文中, 我们还提出利用交流磁化率计算磁力的方法来分析金属受力, 可以在保证结果准确性的前提下大大缩短研究所需要的时间, 在后续研究和需要相关分析的行业中更加具有实际意义。

Electrodynamics of Continuous Media [M]. Moscow: Elsevier.

- LUO J, CHEN L S, DUAN H Z, et al, 2016. TianQin: A space-borne gravitational wave detector [J]. Class Quantum Grav, 33(3): 035010.
- McNAMARA P, VITALE S, DANZMANN K, 2008. LISA Pathfinder[J]. Class Quantum Grav, 25(11): 114034.
- RUAN W H, GUO Z K, CAI R G, et al, 2020. Taiji Program: Gravitational-wave sources[J]. Int J Mod Phys A, 35(17): 2050075.
- WU J Q, LI X Y, PENG D, et al, 2025. Calculation method for eddy current effect of test mass in TianQin[J]. Class Quantum Grav, 42(19): 097001.

(责任编辑 王海蓉)