

# 电阻抗成像探测地下溶洞的几种方法\*

吴泽宇, 刘祚秋, 汪利

中山大学航空航天学院, 广东 广州 510006

**摘要:** 电阻抗成像探测溶洞是一个典型的反问题, 具有一定的非适定性或病态性, 即对测量误差十分敏感。为了克服非适定性的缺陷, 引入正则化方法。考虑两种有效的正则化方法—Tikhonov 正则化和稀疏正则化, 以两种不同的求解方式—线性近似直接求解和迭代求解进行求解。因设备相对简单, 数据获取比较方便, 对材料非均匀性不敏感等, 文章使用电阻抗成像探测了地下溶洞。最后, 通过数值算例对比了几种方法的效果。

**关键词:** 电阻抗成像; 溶洞探测; Tikhonov 正则化; 稀疏正则化; 灵敏度分析

**中图分类号:** TB123 **文献标志码:** A **文章编号:** 2097-0137 (2022) 02 -0100 -06

## Electrical impedance imaging for cavity detection

WU Zeyu, LIU Zuoqiu, WANG Li

School of Aeronautics and Astronautics, Sun Yat-sen University, Guangzhou 510006, China

**Abstract:** Electroimpedance tomography (EIT) is a typical inverse problem in karst cave detection, which is ill-posedness and very sensitive to measurement error. In order to overcome the defect of ill-posedness, the regularization method should be introduced. In this paper, we mainly consider Tikhonov regularization and sparse regularization. Then, two different methods—linear approximate direct solving method and iterative solution method is used to solve the problem. And, EIT is used to detect underground karst caves, because of some advantages, such as relatively simple equipment, convenient data acquisition and insensitive to material inhomogeneity. Finally, a numerical example is given to compare the effects of these methods.

**Key words:** EIT; cavity detection; Tikhonov regularization; sparse regularization; sensitivity analysis

电阻抗成像方法是可以用于探测地下溶洞的一种方法, 其原理是根据物体内部不同物质的导电参数 (如电阻率、电容率) 的不同, 通过对物体表面电流、电压的施加和测量来获知物体内部导电参数的分布, 进而重建出反映物体内部结构的图像, 该方法的难点一是固有的病态性, 即边界电压数据的微小扰动可能引起解的巨大变化; 另一个困难是它的信息量小。如何实现系统的高精度、高分辨率和算法的快速收敛是其应用的主要难点<sup>[1]</sup>。

电阻抗成像的起源可以追溯到 20 世纪 20 年代, 地球物理学研究者提出了线性电极阵列的电阻率成像 (Resistivity Imaging) 技术。19 世纪 70 年代, 生物医学研究者提出了圆形电极阵列的断层电阻率测量技术 (Tomographic Resistivity Measurement Technique)。1978 年, Henderson 和 Webster 做出了第一幅电阻抗图像。他们使用固定于胸部上的由一大电极和与之相对的若干小电极组成的电极系统。通过测量从各小电极流向大电极的电流所形成的等位差, 获得了可以清楚地显示肺

\* 收稿日期: 2020-09-10 录用日期: 2020-10-12 网络首发日期: 2021-05-21

基金项目: 国家自然科学基金 (11702336, 11972380)

作者简介: 吴泽宇 (1997 年生), 男; 研究方向: 电阻抗成像溶洞探测; E-mail: wuzy27@mail2.sysu.edu.cn

通信作者: 汪利 (1988 年生), 男; 研究方向: 计算力学; E-mail: wangli75@mail.sysu.edu.cn

脏位置的阻抗图像。但是这还不是断层图像, 而是类似X胸片的透视图像。1982年, 英国Sheffield大学的Brown和Barber实现了第一个手臂的阻抗层析图像, 开辟了电阻抗层析成像(EIT)技术这一新的研究领域<sup>[2]</sup>。

本文采用电阻抗成像法探测了地下溶洞, 并采用Tikhonov正则化和稀疏正则化方法以解决反问题固有的非适定性问题; 在正则化的过程中运用了灵敏度分析法, 又分别采用线性近似直接求解和迭代求解两种方法进行求解, 并进一步分析了几种方法的识别精度与误差敏感度, 为实际工程中的地下溶洞识别提供了一定的参考。

## 1 问题的描述

### 1.1 正问题

考虑一个空间区域 $\Omega$ 及其边界 $\partial\Omega$ <sup>[3-4]</sup>, 电阻抗成像的正问题是在已知材料电阻率 $\rho(x)$ ,  $x \in \Omega$  (或其倒数, 视电阻率 $c(x) = 1/\rho(x)$ ) 的情况下, 求解区域内的电势 $u(x)$  (或电压) 分布。考虑边界 $\partial\Omega$ 上输入输出电流, 正问题的控制方程<sup>[5]</sup>为

$$\nabla \cdot (c \nabla u) = 0, \quad x \in \Omega. \quad (1)$$

边界条件为

$$\int_{e_l} c(\mathbf{n} \nabla u) = I_l, \quad l \in S_I, \quad (2)$$

$$c(\mathbf{n} \nabla u) = 0, \quad x \in \partial\Omega \setminus \bigcup_{l=1}^L e_l,$$

其中 $\mathbf{n}$ 为边界上的外法向量,  $S_I$ 为所有边界电流点 (或电极) 的集合, 考虑电流几乎为单点输入输出,  $e_l$ 表示的是包含电流点 $l$ 的微小区域,  $I_l$ 是点 $l$ 处的电流量。 $I_l > 0$ 表示电流输入,  $I_l < 0$ 则为电流输出。如果某个电极方案只有点1输入单位电流, 而点2输出单位电流, 则有 $I_1 = 1, I_2 = -1, I_l = 0, l \in S_I \setminus \{1, 2\}$ 。此外, 还可以测量一系列边界点的电势, 这些测量的电势点的集合记为 $S_u$ ; 电势点 $S_u$ 与电流点 $S_I$ 可以有部分重合。问题(1)~(2)是典型的Neumann边值问题, 为了确保解的存在性, 需要满足所有输入输出电流总和为0, 即

$$\sum_{l \in S_I} I_l = 0. \quad (3)$$

为了确保解的唯一性, 可以额外添加约束

$$\sum_{k \in S_u} u_k = 0, \quad (4)$$

其中 $u_k$ 表示点 $k$ 上的电势。

基于以上描述, 考虑电阻抗成像探测地下溶洞这一问题 (如图1所示)。问题所属区域简化为图1右侧的矩形区域。电流点与电势点不一致, 但

数目相等。

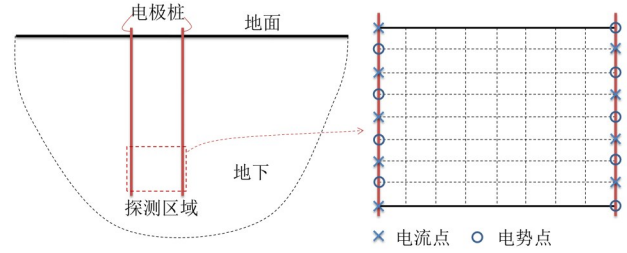


图1 电阻抗成像探测地下溶洞示意图

Fig. 1 Diagram of electrical impedance imaging for cavity detection

通常可以使用有限元进行正问题求解, 得到如下方程

$$\mathbf{K} \mathbf{u} = \mathbf{f}, \quad (5)$$

$$\sum_{k \in S_u} u_k = 0,$$

其中 $\mathbf{u} = [u_1 \ u_2 \ \cdots \ u_n]^T$ 包含所有结点电势,  $\mathbf{f} = [f_1 \ f_2 \ \cdots \ f_n]^T$ 则表征电流向量, 不同的电极方案,  $\mathbf{f}$ 不同。考虑如式(2)中的情形, 可以有

$$f_l = \begin{cases} I_l, & l \in S_I, \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases} \quad (6)$$

刚度矩阵 $\mathbf{K}$ 与各单元的视电阻率 $\mathbf{c} = [c_1 \ c_2 \ \cdots \ c_m]^T$ 线性相关, 即

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}(\mathbf{c}) = \sum_{j=1}^m c_j \mathbf{K}_j, \quad (7)$$

其中 $\mathbf{K}_j$ 为单位电阻率时的单元刚度矩阵。

### 1.2 反问题

根据 $s$ 组电极方案 $\{\mathbf{f}^i\}_{i=1}^s$ 测量得到的 $s$ 组电势数据 $\{\hat{\mathbf{u}}_{S_u}^i\}_{i=1}^s$ , 反推识别区域的视电阻率 $\mathbf{c}$ 。其中, 下标 $S_u$ 表示测量电势点集合上的数据。根据正问题(5), 给定视电阻率 $\mathbf{c}$ , 可以直接计算得到测点上的电势结果, 记为 $\{\mathbf{u}_{S_u}^i(\mathbf{c})\}_{i=1}^s$ 。按照一般反问题的思路, 电阻抗成像的数学描述为: 寻找 $\mathbf{c}$ 使得计算数据 $\{\mathbf{u}_{S_u}^i(\mathbf{c})\}_{i=1}^s$ 与测量数据 $\{\hat{\mathbf{u}}_{S_u}^i\}_{i=1}^s$ 尽可能地接近, 即求解如下优化问题<sup>[6-7]</sup>

$$\min_{\mathbf{c}} g(\mathbf{c}) = \sum_{i=1}^s \left\| \hat{\mathbf{u}}_{S_u}^i - \mathbf{u}_{S_u}^i(\mathbf{c}) \right\|^2 = \left\| \hat{\mathbf{R}} - \mathbf{R}(\mathbf{c}) \right\|^2, \quad (8)$$

其中 $g(\mathbf{c})$ 为电阻抗法的目标函数,  $\hat{\mathbf{R}} = [\hat{\mathbf{u}}_{S_u}^1 \ \hat{\mathbf{u}}_{S_u}^2 \ \cdots \ \hat{\mathbf{u}}_{S_u}^s]^T, \mathbf{R}(\mathbf{c}) = [\mathbf{u}_{S_u}^1(\mathbf{c}) \ \mathbf{u}_{S_u}^2(\mathbf{c}) \ \cdots \ \mathbf{u}_{S_u}^s(\mathbf{c})]^T, \|\cdot\|$ 表示向量的2范数。接下来, 将提出几种方法求解电阻抗成像问题(8)。

## 2 电阻抗成像的理论与方法

考虑到  $u_{s_n}^i(c)$  与视电阻率  $c$  成复杂的非线性关系, 问题 (8) 是典型的非线性最小二乘优化问题, 通常需要迭代求解。在梯度类算法中, 需要计算灵敏度矩阵  $S(c) = \nabla_c R(c)$  以及初始估计值, 记为  $c_0$ 。

### 2.1 初值或平均视电阻率估计

在实际溶洞探测中, 可以通过测试得到某些土体的视电阻率参数, 然后依次可以得到土体的整体视电阻率估计, 并以此作为数值  $c_0$ 。但测试时, 土体样本体积有限, 湿度等会发生一定的变化, 导致测试会存在偏差, 且会耗费一定的代价。实际中, 可以根据测量数据直接估计地下区域内平均视电阻率, 然后以此作为初值, 识别区域内的视电阻率分布。估计平均值时, 假设区域内视电阻率均匀分布, 即  $c = c_0 \mathbf{1}$  ( $\mathbf{1}$  表示向量的所有位置取值均为 1)。此时, 可以有  $u_{s_n}^i(c) = \frac{1}{c_0} u_{s_n}^i(1)$ ,

$R(c) = \frac{1}{c_0} R(1)$ 。代入式 (8) 可以得到

$$[1c_0] = \frac{\hat{R}^T R(1)}{R(1)^T R(1)}. \quad (9)$$

此时, 可以选择初值为  $c_0 = c_0 \mathbf{1}$ 。

### 2.2 灵敏度分析

为了得到  $\frac{\partial R(c)}{\partial c_j}, j = 1, 2, \dots, m$ , 需要进行灵敏度分析。对方程 (5) 求关于  $c_j$  的偏导, 可得

$$K \frac{\partial u}{\partial c_j} = -\frac{\partial K}{\partial c_j} u = -K_j u, \quad (10)$$

$$\sum_{k \in S_n} \frac{\partial u_k}{\partial c_j} = 0.$$

针对  $s$  组电极方案  $f^i$  及其在视电阻率  $c$  下的电势解  $u^i$ , 求解方程 (10), 进而可以得到  $\frac{\partial u_{s_n}}{\partial c_j}$  及灵敏度矩阵

$$S(c) = \nabla_c R(c) = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_{s_n}^1}{\partial c_1} & \frac{\partial u_{s_n}^1}{\partial c_2} & \dots & \frac{\partial u_{s_n}^1}{\partial c_m} \\ \frac{\partial u_{s_n}^2}{\partial c_1} & \frac{\partial u_{s_n}^2}{\partial c_2} & \dots & \frac{\partial u_{s_n}^2}{\partial c_m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial u_{s_n}^s}{\partial c_1} & \frac{\partial u_{s_n}^s}{\partial c_2} & \dots & \frac{\partial u_{s_n}^s}{\partial c_m} \end{pmatrix}. \quad (11)$$

接下来, 将根据已有的初值  $c_0$  和灵敏度矩阵

进行参数识别。考虑使用不同的正则化方法 (Tikhonov 正则化<sup>[8]</sup> 和稀疏正则化<sup>[9]</sup>) 以及是否迭代的因素, 主要可以分为 4 种方法: Tikhonov 更新法、稀疏更新法、Tikhonov 迭代法、稀疏迭代法。

### 2.3 Tikhonov 更新法

这里假设初值  $c_0$  与待识别结果  $c$  比较接近, 此时可以对  $R(c)$  使用 Taylor 展开, 得到

$$R(c) \approx R(c_0) + S(c_0)(c - c_0). \quad (12)$$

然后, 问题 (8) 就近似变成

$$\min_c g(c) \approx \left\| \hat{R} - [R(c_0) + S(c_0)(c - c_0)] \right\|^2, \quad (13)$$

即为一个线性最小二乘优化问题。考虑到反问题的非适定性 (即矩阵  $S(c_0)^T S(c_0)$  的条件数非常大), 需要引入正则化进行求解。一般可假设区域内土体视电阻率分布比较均匀, 接近初始估计的  $c_0$  (或更新量  $(c - c_0)$  较小且比较均匀)。由此, 可以引进 Tikhonov 正则化来克服非适定性, 得到

$$c^* = \arg \min_c \left\{ \left\| \hat{R} - [R(c_0) + S(c_0)(c - c_0)] \right\|^2 + \lambda \|c - c_0\|^2 \right\}, \quad (14)$$

其中正则化稀疏  $\lambda > 0$  可通过 L-curve 方法<sup>[10-11]</sup> 进行确定。

### 2.4 稀疏更新法

同样考虑如公式 (12) ~ (13) 的线性近似的过程, 但使用稀疏正则化处理非适定性。实际溶洞探测问题中, 溶洞的存在相对于探测区域通常体积较小, 在空间分布上具有一定稀疏性 (或更新量  $(c - c_0)$  是稀疏的), 因此可以使用稀疏正则化进行处理。稀疏更新法的求解问题为

$$c^* = \arg \min_c \left\{ \left\| \hat{R} - [R(c_0) + S(c_0)(c - c_0)] \right\|^2 + \lambda \|c - c_0\|_1 \right\}, \quad (15)$$

其中  $\|v\|_1 = \sum_{i=1}^m |v_i|$  表示向量的 1 范数,  $\lambda > 0$  是给定的稀疏正则化参数。以上优化问题 (15) 虽为非线性, 但可采用凸优化分析中的二次规划、内点法等进行快速求解。

### 2.5 Tikhonov 迭代法

在以上的 Tikhonov 更新法和稀疏更新法中, 直接通过线性展开 (12) 进行求解, 这样的过程简单直观, 但必须建立在真实土体参数与初始估计十分接近的条件上, 即  $(c - c_0)$  要较小。实际中,

$(c - c_0)$ 可能较大, 比如出现溶洞后, 该处的视电阻率趋于0。此时, 需要进行迭代求解。Tikhonov迭代法表现为重复、迭代使用Tikhonov更新法的求解过程。即, 给定 $c_0$ 按照下式进行迭代

$$c_k = \arg \min_c \left\{ \left\| \hat{R} - [R(c_{k-1}) + S(c_{k-1})(c - c_{k-1})] \right\|^2 + \lambda \left\| c - c_{k-1} \right\|_1^2 \right\}, \quad (16)$$

直至收敛。在每一步迭代中, 正则化参数 $\lambda$ 均可根据L-curve准则确定。

### 2.6 稀疏迭代法

与Tikhonov迭代法类似, 稀疏迭代法则表现为使用稀疏更新法重复、迭代求解的过程。迭代式为

$$c_k = \arg \min_c \left\{ \left\| \hat{R} - [R(c_{k-1}) + S(c_{k-1})(c - c_{k-1})] \right\|^2 + \lambda \left\| c - c_{k-1} \right\|_1 \right\}, \quad (17)$$

其中 $\lambda$ 为给定的稀疏正则化系数。

## 3 数值算例

选取矩形区域长宽均为4 m×4 m, 每边均匀划分为8个单元, 假设初始区域的视电阻率是均匀的, 取值为 $c_0 = 10$ 。考虑如图2中三种溶洞情况(溶洞处的视电阻率等效为3, 相对于土体的10, 有较大的折减), 其中Case 1、Case 2为单个溶洞的情况、Case 3为多个溶洞的情况, 图块颜色与视电阻率的对应关系如图右侧色标所示。

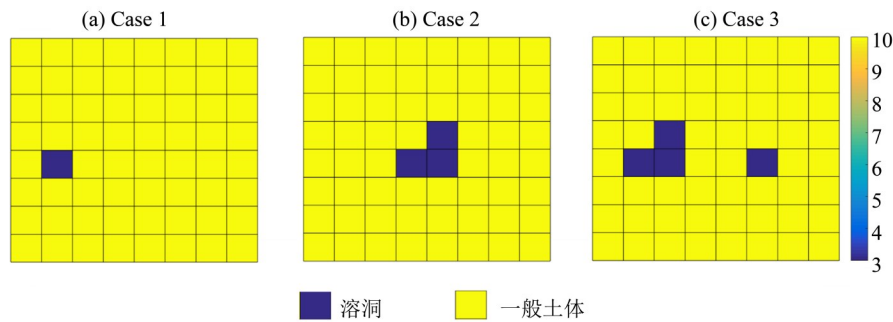


图2 溶洞探测的三种情况

Fig. 2 Three cases of cavity detection

考虑如图1右侧的矩形区域和电极方案, 通过给定的电流与真实视电阻率分布得到电势结果, 分别利用Tikhonov更新法、稀疏更新法、Tikhonov迭代法和稀疏迭代法识别以上三种溶洞情况。其中Tikhonov法的正则化参数通过L-curve方法进行确定, 而稀疏正则化参数取 $10^{-8}$ 。

另外, 考虑误差存在时的情形, 此时电势情况 $u = u_0(1 + fr \cdot \text{Randn})$ ; 其中,  $u_0$ 为真实电势;  $\text{Randn}$ 是与电势矩阵同阶的随机数矩阵, 其每个元素都是 $[-1, 1]$ 上的正态分布随机变量;  $fr$ 为变量的系数, 这里取 $fr = 0.001$ 。

Case 1在无误差和有误差情况下的识别结果分别如图3~4所示, Case 2在无误差和有误差情况下的识别结果分别如图5~6所示, Case 3在无误差和有误差情况下的识别结果分别如图7~8所示。从结果中可以看出:

1) Tikhonov更新法在无误差的情况下识别单个溶洞(图3和图5)时, 在溶洞位置可以识别到视电阻率的折减, 但与真实情况相比, 视电阻率

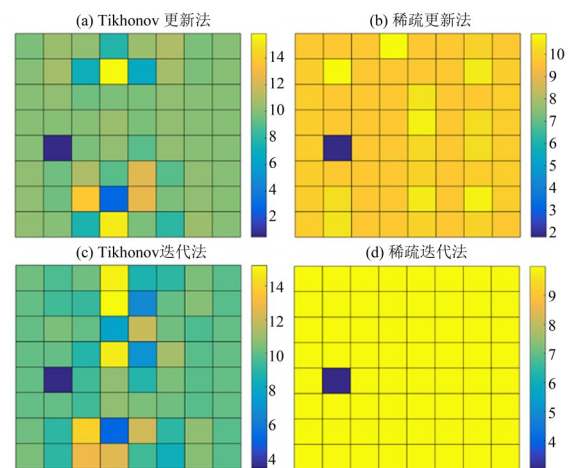


图3 无误差时Case 1的识别结果

Fig. 3 Results of Case 1 without error

在数值上相差较大, 结果较为粗糙; 而在有误差的情况下(图4和图6), 在溶洞位置也能看出视电阻率的差别, 但与无误差情况相比, 结果的差别较大; 而在识别多个溶洞的情况时(图7和图8), 无论是否有误差, 视电阻率的分布较为混乱, 多

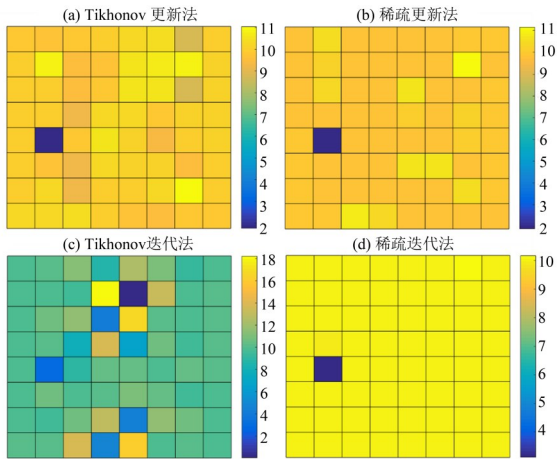


图4 有误差时 Case 1 的识别结果  
Fig. 4 Results of Case 1 with error

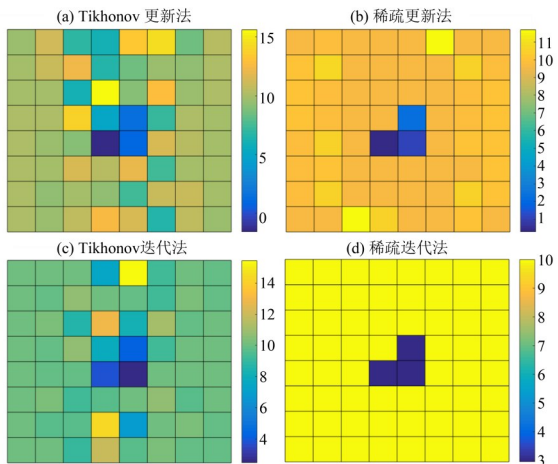


图5 无误差时 Case 2 的识别结果  
Fig. 5 Results of Case 2 without error

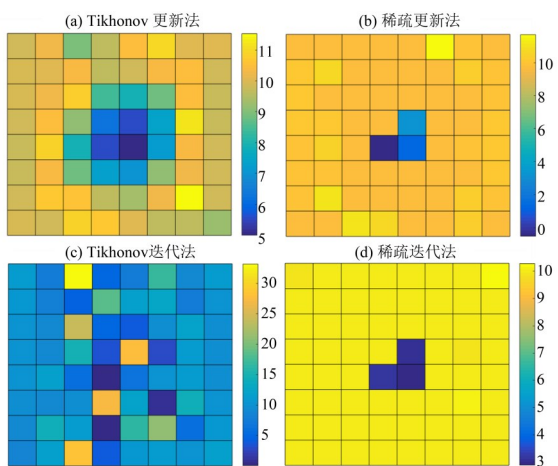


图6 有误差时 Case 2 的识别结果  
Fig. 6 Results of Case 2 with error

处出现电阻率折减, 电阻率在数值上与真实情况有较大差别, 无法识别出正确的溶洞位置。

2) 稀疏更新法在无误差的情况下识别单个溶

洞 (图3到图6) 时, 可以明显地看到溶洞位置有明显的视电阻率折减, 而在其他位置的视电阻率在数值上与真实情况十分接近; 识别相邻的多个溶洞的情况时 (图7和图8), 较大溶洞处有视电阻率的折减, 但不能完全识别出溶洞形状, 数值上也与真实情况有较大差别; 且较小溶洞处没有视电阻率的折减, 其他位置的视电阻率也与真实情况有一定差别, 但各处视电阻率之间相差不大, 且无误差和有误差结果相似。

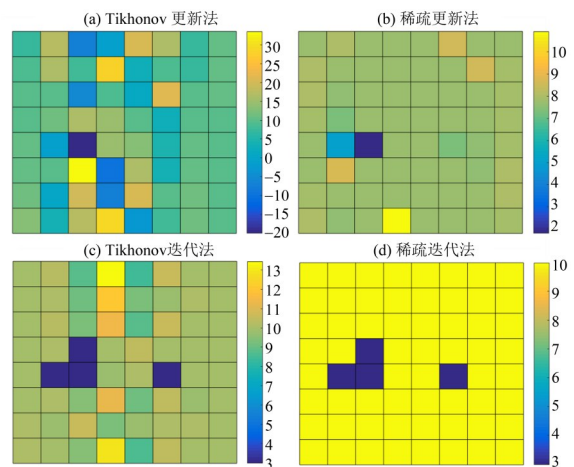


图7 无误差时 Case 3 的识别结果  
Fig. 7 Results of Case 3 without error

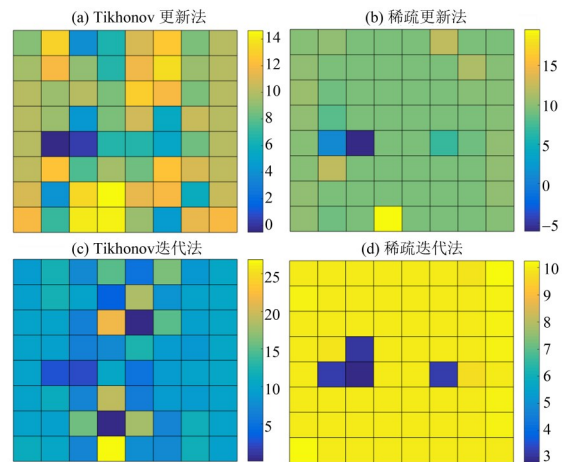


图8 有误差时 Case 3 的识别结果  
Fig. 8 Results of Case 3 with error

3) Tikhonov 迭代法在无误差的情况下识别单个溶洞 (图3和图5) 时, 在溶洞位置可以识别到视电阻率的折减, 其他位置的视电阻率与真实情况在数值上存在较大差别, 且视电阻率分布不均匀。在有误差的情况下 (图4和图6), 视电阻率分布混乱, 有多处位置存在明显的视电阻率折减, 无法识别出溶洞位置; 而在无误差的情况下识别

多个溶洞时(图7),能准确识别到溶洞位置处的视电阻率折减,其他位置的视电阻率也较为均匀。但在有误差的情况下(图8),整个识别区域的视电阻率分布混乱,无法识别到溶洞位置。

4) 稀疏迭代法溶洞探测效果非常好,在无误差的情况下识别单个与多个溶洞(图3、图5和图7)时,结果与真实情况几乎完全一致;而在有误差的情况下(图4、图6和图8),结果也基本保持不变。

## 4 结 论

Tikhonov更新法方法简单,可以大体识别单个溶洞的位置,但结果粗糙,对误差较为敏感,且

无法识别相邻的多个溶洞;稀疏更新法也比较简单,识别单个溶洞时结果较好,对误差敏感度也较低,但在识别相邻的多个溶洞时存在遗漏;Tikhonov迭代法比Tikhonov更新法复杂,在无误差时能识别单个或多个溶洞的位置,但对误差的敏感程度非常大,在有误差情况下完全无法识别出溶洞位置;稀疏迭代法计算量大,但识别结果非常好,对误差的敏感度也很低,无论是否有误差,无论是识别单个还是多个溶洞,都能得到非常理想的结果。

总而言之,从结果上看,几种方法的排序(由好到坏)为:稀疏迭代法>稀疏更新法>Tikhonov更新法>Tikhonov迭代法。

### 参考文献:

- [1] 程吉宽,孙进平,杜岩,等. 电阻抗成像技术的原理及其发展[J]. 北京航空航天大学学报,1998,24(2):137-140.
- [2] 桂芝,杨硕,李颖,等. 阻抗断层成像技术综述[J]. 北工业大学学报,2004,33(2):35-40.
- [3] LOKE M H. Tutorial: 2-D and 3-D electrical imaging surveys[M]. US: USGS Workshop,2001.
- [4] LOKE M H. Electrical imaging surveys for environmental and engineering studies[M]. US: USGS Workshop,2000.
- [5] 张辉,周永军,张小娣. 二维电阻抗断层成像算法研究[D]. 上海:上海大学,2012.
- [6] 肖庭延. 反问题的数值解法[M]. 北京:科学出版社,2003.
- [7] 光远,刘小军. 数学物理反问题[M]. 山东:山东科学技术出版社,1993.
- [8] TIKHONOV A N. Solution of ill-posed problems and the regularization method[J]. Soviet Math Dokl,1963(4):1035-1038.
- [9] ZHOU X Q, XIA Y, WENG S. L1 regularization approach to structural damage detection using frequency data[J]. Structural Health Monitoring,2015,14(6):571-582.
- [10] ANSEN P C. Analysis of discrete ill-posed problems by means of the L-curves[J]. SIAM Review,1992,34(4):561-580.
- [11] MORE J J. The Levenberg-Marquardt algorithm: implementation and theory, in numerical analysis[C]//Proceedings of the 1977 Dundee Conference on Numerical Analysis, Lecture Notes in Mathematics 630. Berlin: Springer Verlag,1978:105-116.

(责任编辑 王海蓉)